

**Administración Nacional de Educación Pública
Consejo Directivo Central**

CUADERNOS DE ESTUDIO II

**Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza
de la Matemática en ANEP**

© ANEP – Administración Nacional de Educación Pública

Queda autorizada la reproducción total o parcial del contenido de la presente obra, a condición de mencionar la fuente.

Administración Nacional de Educación Pública Av. del Libertador 1409. Montevideo
Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP

Realización

Gustavo Rijo
Diseño Gráfico – CODICEN
Asilo 3255 Of.3
Tel.: 481 9694

Foto de Tapa

Dr. Miguel De Guzmán

Impresión

Imprenta Rosgal S.A.

Depósito Legal

Número

ISBN

OCTUBRE 2006



ADMINISTRACIÓN NACIONAL
DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CONSEJO DIRECTIVO CENTRAL

Director Nacional de Educación Pública
Dr. Luis Yarzabal

Sub-Director Nacional de Educación Pública
Prof. José Pedro Barrán

Consejeros
Mtro. Héctor Florit
Prof. Lilián D'Elía

Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente
Director Ejecutivo: Prof. Oruam Barboza

Área de Perfeccionamiento Docente y Estudios Superiores
Mag. Carmen Appratto

Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática

Coordinador: Prof. Ricardo Vilaró

Responsables de la Publicación

Prof. Carla Damisa
Prof. Ariel Fripp
Mtra. Liliana Pazos
Mtra. Beatriz Rodríguez Rava
Prof. Ricardo Vilaró

ÍNDICE

Presentación del Cuaderno	7
Biografía del Dr. Miguel de Guzmán	9
Presentación	11
Introducción	13
Propuesta	15
Fracciones	17
Secuencias de enseñanza	25
Análisis didáctico	46
Reflexiones finales	109
Anexos	119
Bibliografía	123

Esta publicación integra la serie **“Cuadernos de Estudio”** del Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP (PMEM).

Este Programa funciona en la órbita de la ANEP desde el año 2000 y desde su gestación se ha desarrollado como un espacio para la indagación, el estudio, la producción de conocimiento didáctico y la elaboración de propuestas de cambio con el objetivo de mejorar la enseñanza de la Matemática en la ANEP.

Desde su constitución incorporó docentes de todos los subsistemas y niveles de la ANEP y contó con la presencia activa de dos matemáticos profesionales nombrados por los consejos de las facultades de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de la República (UDELAR).

El PMEM ha realizado un abordaje de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática como un continuo desde la Educación Inicial a la Media Superior, la Formación Docente y las respectivas interfaces.

Como parte del trabajo de indagación y reflexión se ha realizado un esfuerzo de relacionamiento internacional y de relevamiento de información respecto a producción, planes y programas de otros países.

Los talleres, seminarios y cursos realizados en la órbita del Programa han tenido, además de su propio valor, la posibilidad de aportar a la indagación y a la reflexión sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

El PMEM se constituyó de este modo en un programa con autonomía relativa para relevar, analizar, investigar y teorizar sobre los problemas de la enseñanza en toda la ANEP y para establecer un diálogo y una cooperación permanente con los diferentes subsistemas.

Ha ido construyendo sus saberes y enfoques, desarrollando un nivel de estudio e investigación y recogiendo - en la medida de sus posibilidades - la producción en documentos y publicaciones.

Es en este marco en el que surge la serie **“Cuadernos de estudio”**. En cada una de estas publicaciones se incluye una pequeña biografía y la imagen de un especialista que se ha destacado por su producción en Matemática y / o en su enseñanza. En este número se pretende hacer un reconocimiento al **Dr. Miguel de Guzmán** por su valiosa contribución a la Matemática y también a su enseñanza.

DR. MIGUEL DE GUZMÁN

El Dr. Miguel de Guzmán nació en Cartagena (Murcia) el 12 de enero de 1936 en un ambiente familiar difícil y con malas condiciones económicas. Siendo el menor de cinco hermanos fue internado en un colegio de huérfanos de Madrid al fallecer su padre. Cursó el bachillerato en la ciudad de Bilbao, culminándolo con destacado rendimiento, para ingresar luego a la Escuela de Ingenieros Industriales de dicha ciudad. Pero no cursa ingeniería sino que entra en la Compañía de Jesús y estudia Literatura y Humanidades en Vizcaya y Filosofía en Guipúzcoa.

A sus dos hermanos mayores, ingenieros ellos, se les debe reconocer la influencia que tuvieron sobre él ya que lo impulsaron a estudiar Matemática y se convirtieron en sus primeros profesores. Al terminar sus estudios de Filosofía, entre 1961 y 1965, hace la Licenciatura de Matemática y Filosofía en la Universidad Complutense de Madrid (UCM) y alcanza un notable prestigio en la Facultad de Matemática de dicha Universidad.

Continuó avanzando en el campo de la Matemática y asistió a la Universidad de Chicago donde el argentino Alberto Calderón, uno de los más destacados especialistas del Siglo XX en Análisis Matemático, dirigió su tesis doctoral.

En el año 1969 vuelve a la Universidad Complutense de Madrid con la clara intención de renovar la mirada de los investigadores y educadores matemáticos de la época.

A Miguel de Guzmán se lo reconoce en el campo de la investigación matemática por sus aportes en el Análisis Matemático al trabajar con Operadores Integrales Singulares, Diferenciación de Integrales, Análisis de Fourier, Ecuaciones en Derivadas Parciales y Ecuaciones Ordinarias. Dan cuenta de este trabajo las monografías: *Differentiation of Integrals in R^n* (1975) y *Real Variable Methods in Fourier Analysis* (1981). Se destacan también sus aportes a la Teoría Geométrica de la Medida y las Estructuras Fractales.

Fue catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Autónoma de Madrid y luego en la Complutense y uno de los miembros más activos, en España, de la Real Academia de Ciencias.

La preocupación de Miguel de Guzmán por la educación matemática ha sido quizás una característica fundamental de su trabajo, da cuenta de esto su pasaje por la presidencia del ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).

Escribió, junto a un equipo de colaboradores, libros para el Bachillerato que fueron verdaderas innovaciones y numerosos libros de divulgación entre los que cabe destacar: *Mirar y ver* (1977), *Cuentos con cuentas* (1985), *Para pensar mejor* (1991), *Aventuras matemáticas: una ventana hacia el caos y otros episodios* (1995) y *El Rincón de la pizarra* (1997).

En el marco de la Real Academia de Ciencias ideó el ESTALMAT (Estímulo del talento matemático) un programa destinado a fomentar en jóvenes escolares, el interés por la Matemática.

Creó y desarrolló CUES (Cooperación Universitaria Española), una organización no gubernamental, cuyo principal interés era colaborar con el desarrollo de la Matemática en los países del tercer mundo.

Cuando cumplió, en 1996, los sesenta años de edad, recibió el homenaje de la comunidad matemática al celebrarse en su honor la 5th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations.

Miguel de Guzmán murió el 14 de abril de 2004 no sin antes dejar en la comunidad de matemáticos y de educadores en Matemática una nueva manera de mirar y entender esta disciplina.

PRESENTACIÓN

En el marco de las acciones que desarrolla el Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en la Administración Nacional de Educación Pública (PMEM) se ha considerado necesario profundizar el estudio de la enseñanza de determinados contenidos en la escuela primaria, y en especial en las escuelas en donde se realiza la práctica magisterial.

Se plantea la necesidad de actualización y revisión de las prácticas de aula de los maestros adscriptores que desde su rol contribuyen a la formación inicial de maestros.

Durante el año 2005 se llevó a cabo un Proyecto que posibilitó el estudio de la enseñanza de un contenido programático (fracciones) a lo largo del ciclo escolar (desde Inicial a 6° año de Educación Primaria). El Proyecto fue considerado una acción de Desarrollo Curricular que apuntó a la producción de conocimiento didáctico a partir de la Investigación Didáctica que incluye.

Esta publicación recoge el material resultante de dicha experiencia.

Los objetivos del Proyecto fueron:

- Introducir innovaciones en las prácticas de aula vigentes para la enseñanza de la Matemática en dos Escuelas correspondientes al área de Práctica de la ciudad de Montevideo.
- Profundizar y desarrollar los conocimientos matemáticos de los maestros participantes.
- Proporcionar herramientas para:
 - la indagatoria de los procesos de aprendizaje en el aula,
 - el análisis de los obstáculos en la apropiación de los conceptos matemáticos,
 - la producción de propuestas innovadoras,

de modo que se constituyan en aportes para la orientación de los estudiantes magisteriales.

Participaron de este Proyecto docentes de dos Escuelas de Práctica de Montevideo: siete maestros de la Escuela N° 14 "José de San Martín" y ocho maestros de la Escuela N° 25 "Rui Barbosa".

Maestros de la Escuela N°14 "José de San Martín"

Andrea Mañana – Inicial - 5 años
 Silvia Banchero – 2do año
 Rosario Caldas – 3er año
 Silvia Abal – 4to año
 Edna Scarcela – 4to año
 Ana María Gómez – Maestra Adscripta
 Ma. Anabel Donatti – Maestra Directora

Maestros de la Escuela N°25 "Rui Barbosa".

Beatriz Lemos – Inicial – 5 años
 Patricia Coronel – 1er año
 Mariana Farber – 2do año
 Claudia Silva – 3er año
 Carmen Cruxen – 4to año
 Virginia Méndez – 5to año

Juan Pedro Mir – 6to año
Luz Santos – Maestra Directora

Se contó con el apoyo y acompañamiento de la Inspectora Nacional de Práctica Maestra Nancy Salvá y de las Inspectoras Maestras Teresa Baeza y Anurys Sassen.

El desarrollo del Proyecto supuso las siguientes acciones:

1. Trabajo semanal (fuera del horario escolar) con contenidos matemáticos y didácticos con todos los maestros participantes.
2. Elaboración de secuencias de enseñanza del contenido *fracciones* para todos los niveles escolares por parte del equipo perteneciente al Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP. Para esto se contó con el apoyo de la Dra. Patricia Sadovsky de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
3. Realización del análisis didáctico de las secuencias en forma conjunta con los maestros involucrados, previo a su puesta en práctica.
4. Puesta en acción de las actividades por parte de los maestros y observación de las mismas a cargo de integrantes del equipo técnico (PMEM), de otros maestros y de practicantes. Algunas de las actividades fueron filmadas a los efectos de lograr registros más completos y poder generar así discusiones a partir de las mismas.
5. Discusión, con la totalidad de los maestros participantes de la experiencia, sobre lo recogido en las observaciones, aportando elementos teóricos para la realización del análisis didáctico de las actividades observadas.
6. Análisis colectivo de las puestas en acción.
7. Estudio comparativo de lo sucedido en ambas escuelas.
8. Entrega de material bibliográfico y apoyo técnico permanente a los maestros participantes.

Responsables del Proyecto

La Dirección académica y coordinación del Proyecto estuvo a cargo de los integrantes del Programa Prof. Ricardo Vilaró (Coordinador del Programa), la Maestra Beatriz Rodríguez Rava y el Prof. Ariel Fripp. Participaron de este Proyecto otras docentes del Programa: Maestra Liliana Pazos, Prof. Carla Damisa.

INTRODUCCIÓN

Una de las tareas más complejas que se presenta en la escuela es la relativa a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Esto queda en evidencia cuando los alumnos terminan el ciclo escolar y no han logrado la aproximación esperada al concepto de fracción. Existen distintas cuestiones que explican esta dificultad.

El concepto de fracción es un concepto complejo cuya construcción requiere un trabajo sistemático a lo largo del ciclo escolar.

Por otra parte el manejo que se hace de dicho contenido en la escolaridad, es en general, conceptualmente pobre ya que solo se realizan actividades que promueven el fraccionamiento de la unidad y el dominio de algoritmos operatorios con un cargado énfasis en la notación convencional y en reglas de cálculo. Se deja de lado de esta forma una gama importante de situaciones que están vinculadas a otros aspectos como, por ejemplo, los diferentes significados de las fracciones.

Además, muchas veces se trabaja con expresiones decimales sin establecer relaciones con las fracciones y no se exploran e identifican las vinculaciones entre las fracciones y otros contenidos escolares como lo son la división, las razones, la proporcionalidad, etc.

También es real que el docente desconoce, muchas veces, los esquemas de conocimiento necesarios para conceptualizar la fracción así como las concepciones que los alumnos poseen sobre la misma.

Todo esto puede generar en los alumnos conocimientos muy pobres, y que sólo tienen cabida en el ámbito escolar.

Según Gérard Vergnaud¹ el significado de un conocimiento matemático está profundamente vinculado a las situaciones que resuelve y que dan sentido al concepto, al conjunto de invariantes o esquemas de acción que intervienen y al conjunto de representaciones simbólicas (esquemas, escrituras, diagramas, etcétera) que se utilizan en la resolución de problemas.

Para Vergnaud un concepto está relacionado a una variedad de situaciones, y a su vez una situación vincula varios conceptos.

En este marco el estudio de los conceptos matemáticos tiene sentido si se analizan las variadas relaciones, entre las situaciones y entre otros conceptos dando lugar así a lo que él denomina *campo conceptual*.

Este concepto ha sido desarrollado por Vergnaud quien lo ha definido en distintos momentos como:

“...un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos pero íntimamente relacionados”²

“Llamamos campo conceptual a un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha relación, así como las representaciones lingüísticas y simbólicas que pueden utilizarse para simbolizarlos.”³

En el caso de la fracción, el concepto está vinculado fuertemente a distintas situaciones: de reparto, de medida, de transformación de medidas y de comparación, etc. Estas situaciones son las que le dan significado al concepto de fracción.⁴

¹ Laborde, C.; Vergnaud, G. (1994)

² Vergnaud, G. (1983)

³ Laborde, C.; Vergnaud, G. (1994)

⁴ Distintos autores manejan diferentes clasificaciones de los significados de fracción: Kieren, Dickson, Llinares.

Esto nos lleva a sostener que la construcción del sentido de las fracciones es complejo y que necesita de un trabajo intencional, sistemático y sostenido a lo largo de años. Para ello es necesario generar interacciones de los niños con variadas situaciones, con sus esquemas de conocimiento y con los significantes.

El estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones ha sido una preocupación de muchos educadores a lo largo de la historia. Martha Dávila en su Tesis de Maestría ⁵ realiza un relevamiento de los diferentes trabajos con respecto a este tema.

En 1941 Gardner⁶ lleva adelante una investigación que pretende conocer los errores que cometen los alumnos al trabajar con fracciones para sugerir al maestro algunas tareas que le permitieran mejorar su habilidad para operar.

Hart⁷ en 1977 realiza dos evaluaciones escritas a alumnos de 12 y 15 años. En dichas propuestas aparecen operaciones descontextualizadas planteadas de manera tradicional y por otro lado se presentan problemas cuya resolución exige operar con fracciones. La mayor parte del alumnado logró mejores resultados en la resolución de problemas contrariamente a las hipótesis manejadas por los investigadores. Los alumnos recurrieron en muchos casos a la utilización de otras nociones por ejemplo, equivalencia de fracciones o de diagramas dejando de lado las operaciones.

En el caso de las operaciones descontextualizadas los errores fueron mayores en los alumnos de mayor edad.

Frente a estos resultados Hart plantea "Pareciera como si estuvieran involucrados dos tipos de matemáticas completamente diferentes; una en la que se podía usar el sentido común y la otra en la que se tenía que recordar una regla" (citado por Dávila).

Hart y su equipo incluyeron entrevistas posteriores con algunos alumnos para indagar el origen de las concepciones referidas a las fracciones y para poder rastrear el tipo de razonamiento que llevaba a los alumnos a cometer errores al operar con fracciones.

Figueras⁸ realiza en 1988 un estudio con alumnos de entre 11 y 14 años (recién egresados de la enseñanza Primaria).

Los objetivos de este trabajo son: a) "dilucidar la relación entre la adquisición del concepto de fracción y el desarrollo de habilidades para interpretar lenguaje geométrico simbólico convencional empleado en los libros de texto en Primaria"; b) "reconocer la manera en que los alumnos conciben la fracción y las dificultades en su proceso de aprendizaje"⁹

Otros investigadores como Ávila, Mancera, Streefland, han profundizado en el estudio del aprendizaje de las fracciones.

También han contribuido al análisis de esta noción desde diferentes perspectivas Kieren, Freudenthal, Vergnaud y Brousseau.

⁵ Dávila, M. (2002)

⁶ Ibidem

⁷ Ibidem

⁸ Ibidem

⁹ Ibidem

PROPUESTA

A partir de las diferentes investigaciones y aportes teóricos sobre el tema *Fracciones* así como del estudio y discusiones generadas en el PMEM se elabora una secuencia de enseñanza que promueva aprendizajes y a su vez actúe como escenario de las interacciones necesarias para conceptualizar la fracción a lo largo del ciclo escolar.

En nuestro Programa escolar aparece el tema *Fracciones* como un contenido a partir de 2° año.

La intención de este trabajo es abordar los distintos aspectos que involucra dicho contenido a lo largo del ciclo escolar rompiendo con la tradicional presentación del mismo.

Habitualmente el tema *Fracciones* queda vinculado a las clásicas presentaciones gráficas (“torta”, figuras geométricas, etc) en las cuales aparece un todo dividido en partes iguales y el alumno se limita a la identificación de la, o las, partes.

A lo largo de la escolaridad se insiste con este significado (parte – todo) dejando de lado aquellos en los cuales esta relación no aparece.

Hay investigaciones (Escolano y Gairín)¹⁰ que dejan en evidencia que este significado no tiene un anclaje histórico ya que es producto del trabajo escolar.

Consideramos necesario proponer, desde el comienzo de la escolaridad, actividades en las que se puedan poner en juego otros significados de la fracción. Para ello incluimos no solo actividades de reconstrucción de un todo a partir de “partes”, sino también actividades de reparto equitativo, de medición, etc.

A lo largo del ciclo escolar consideramos tres significados de las fracciones, dados por los contextos de uso, que nos llevan a organizar las actividades en tres categorías:

- I. Repartir equitativamente**
- II. Relacionar**
- III. Medir**

I. Repartir equitativamente

“Kieren, Freudenthal y Vergnaud, entre otros investigadores, consideran a las situaciones de partición, reparto o distribución de cantidades como indispensables para introducir ciertos aspectos de la noción de fracción y para extender esta noción hacia la construcción de otros aspectos fundamentales del número racional como son: la noción de equivalencia, de proporcionalidad y de razón así como el desarrollo de las relaciones *parte – todo* y *parte – parte*.”¹¹

Las situaciones de reparto exigen tener en cuenta la equitatividad de las partes y la exhaustividad del reparto.

Desde el inicio de la escolaridad los niños realizan *repartos reales entre dos* y en algunos casos *entre tres*. Los resultados de los mismos generalmente dejan en evidencia la igualdad de las partes. Es más complejo para el niño lograr la exhaustividad del reparto.

En la educación Inicial y los primeros años de Primaria los repartos reales obligan a pensar en la necesidad de cuantificar los resultados de dichas acciones con números naturales. Posteriormente se podrá analizar la utilización de algunas fracciones.

Los *repartos entre dos* dan la posibilidad de extender las estrategias utilizadas a los *repartos entre cuatro*. En estos casos empieza a funcionar el proceso anticipatorio al trabajar con cantidades pequeñas.

Los *repartos entre tres* ofrecen mayor dificultad para anticipar. Generalmente necesitan recurrir a un reparto “uno a uno”.

¹⁰ Escolano, R. ; Gairín, J. (2005)

¹¹ Dávila, M. (2002)

En esta categoría se incluyen actividades de reparto de cantidades discretas y continuas, y también, actividades que involucran relaciones entre los términos de la división que representa un reparto (dividendo, divisor, cociente) .

A lo largo del ciclo escolar es necesario problematizar las situaciones de *reparto con cuantificación fraccionaria*.

II. Relacionar

Esta categoría supone el fraccionamiento de la unidad en partes iguales. Obliga a trabajar con dos relaciones fundamentales en la construcción de la noción de fracción: la relación de la parte con la unidad y la relación entre las partes.

Piaget, Inhelder y Szeminska ¹² realizan una explicitación de los aspectos a tener en cuenta en el desarrollo de la noción de fracción:

- la fracción surge de un todo divisible, constituido por partes separables,
- supone un número de partes que deben ser iguales,
- la división del todo debe ser exhaustiva,
- existe una relación entre la cantidad de partes y las divisiones que generan dichas partes,
- las partes constituyen el todo original pero a su vez pueden transformarse en nuevos "todos",
- la unión de todas las partes constituye el todo.

Por todo esto consideramos que la noción de fracción es compleja y debe ser trabajada a lo largo del ciclo escolar en situaciones que involucren los diferentes contextos de uso. A nivel de los primeros grados, no planteamos la representación numérica ni el establecimiento de formalizaciones innecesarias.

En esta categoría se incluyen actividades que apuntan a la constitución de la unidad y a la identificación de una parte como representación de una fracción así como al establecimiento de relaciones numéricas.

Dentro de las actividades de constitución de una unidad se propone el trabajo con partes iguales, el cubrimiento del "todo" (unidad), la identificación de la relación entre la cantidad de partes y el "tamaño" de las partes así como la equivalencia entre las partes.

También se incluyen actividades referidas a las relaciones numéricas en las que se ponen en juego la equivalencia, el orden y las operaciones con fracciones.

III. Medir

Las actividades que se incluyen en esta categoría presentan a la fracción como expresión de una medida. Aquí la fracción surge de la necesidad de comunicar el resultado de una práctica efectiva de medición.

Esto presenta diversas dificultades como por ejemplo la identificación de la magnitud a medir, la definición de la unidad de medida y del instrumento de medida, así como las referidas a la acción de medir.

En esta categoría se incluyen actividades en las que la unidad no "entra" una cantidad entera de veces en la magnitud a medir generando así la necesidad de realizar un fraccionamiento de la unidad. También se trabaja con actividades en las que se utilizan unidades mayores que la cantidad de magnitud a medir.

A continuación se presenta una revisión del contenido matemático " Fracciones" y parte de las secuencias desarrolladas en las diferentes clases.

Posteriormente se incluye el análisis didáctico de algunas de las actividades trabajadas.

¹² Piaget, Inhelder y Szeminska (1960)

FRACCIONES

1. Las fracciones y los números racionales

Las fracciones se utilizan cotidianamente en contextos relacionados con la medida, el reparto o como forma de relacionar dos cantidades. Tenemos entonces por ejemplo “un medio”, “tres cuartos”, “la quinta parte de”, “la centésima parte...”, etc.

Son fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{100}$

Todas estas fracciones son menores que la unidad porque en cada una de ellas el numerador es menor que el denominador.

Existen también fracciones mayores que la unidad, por ejemplo:

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{48}{5} = 9 + \frac{3}{5}$$

Las fracciones mayores que la unidad se pueden expresar también a través de lo que llamamos *número mixto*. Así las dos últimas fracciones se escribirían:

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

Podemos observar que cinco medios se puede escribir como un número natural y una fracción menor que la unidad.

Entonces podríamos establecer, como expresan Cólera y Miguel de Guzmán¹³, que las fracciones complementan a los números naturales, dando lugar entre todos, al conjunto de los números racionales positivos.¹⁴

Entonces, ¿los números naturales no son fracciones?

La respuesta a este interrogante, tan común entre los maestros, es que todo número natural se puede representar como una fracción, por ejemplo, el número 8 puede ser representado, entre otras, por las fracciones $\frac{8}{1}$, $\frac{40}{5}$, $\frac{800}{100}$;...

Obsérvese que todo número natural puede ser expresado en forma de fracción y como lo planteamos anteriormente, todo número natural es entonces un número racional.

Ampliando esta idea, todo número entero se puede expresar utilizando fracciones.

Coincidiendo con Cólera y de Guzmán, **“Todos los números racionales se pueden expresar como fracciones, es decir, como cociente de dos números enteros”**¹⁵

2. Fracciones y números racionales ¿son sinónimos?

Los números racionales admiten expresión fraccionaria, es por eso que usualmente se suele confundir el concepto de número racional y el de fracción.

¹³ Cólera, J; de Guzmán, M (1994)

¹⁴ Para obtener el conjunto de los números racionales tendríamos que considerar la unión entre las fracciones (positivas y negativas) y el conjunto de los números enteros (números naturales y sus simétricos con respecto a cero).

¹⁵ Al hablar de cociente de enteros se entiende que la división entre ellos es posible, es decir, con divisor distinto de cero.

Sabemos que un número racional puede expresarse mediante infinitas fracciones, así el racional “tres cuartos” puede representarse:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{60}{80} = \frac{9}{12} = \dots$$

En otras palabras el conjunto de los números racionales está formado por elementos únicos, es decir no repetidos, $\frac{3}{4}$ sería el representante canónico¹⁶ de un número que admite infinitas representaciones.

Existe un único número “tres cuartos” el cual posee infinitas representaciones.

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir o multiplicar por un mismo número distinto de cero, al hacerlo obtenemos una fracción equivalente a la dada.

Es así que se está dividiendo o multiplicando a la fracción por 1 y en consecuencia el resultado de dicha multiplicación o división es igual a dicha fracción.

Así por ejemplo $\frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$ y como $\frac{2}{2} = 1$, resulta entonces que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Obsérvese que entre la fracción obtenida $\left(\frac{6}{8}\right)$ y la dada $\left(\frac{3}{4}\right)$ se verifica que: $3 \times 8 = 4 \times 6$.

Hemos obtenido dos fracciones iguales cuyas componentes son diferentes. Las llamaremos equivalentes porque representan el mismo número.

Son fracciones equivalentes aquellas que verifican la siguiente relación:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c. \quad \text{Ejemplo: } \frac{6}{8} = \frac{9}{12} \Leftrightarrow 6 \times 12 = 9 \times 8$$

Si al simplificar dos fracciones se obtiene el mismo número racional, estas son equivalentes.

Continuando con el ejemplo: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ por lo tanto las fracciones $\frac{9}{12}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes.

En este caso la fracción $\frac{3}{4}$ es la irreducible también llamada representante canónico del racional $\frac{3}{4}$.

Pensando en la enseñanza de las fracciones consideramos conveniente utilizar el signo de igual para relacionar dos fracciones equivalentes.

3.Comparación de fracciones.

Para comparar fracciones de diferente denominador, es conveniente encontrar alguna relación de orden entre ellas. A modo de ejemplo al comparar $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{3}$ obsérvese que $\frac{3}{4}$ es menor que uno y que $\frac{5}{3}$ es una fracción mayor que la unidad, por lo tanto podemos asegurar directamente que $\frac{3}{4} < \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{4} < 1 < \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{5}{3}$$

¹⁶ Llamamos representante canónico a la fracción irreducible.

Este mismo razonamiento, empleado para comparar fracciones con la unidad, podemos utilizarlo para compararlas con otros números conocidos como por ejemplo $\frac{1}{2}$, 3, etc.

En la comparación de $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{9}$ se podría considerar que falta $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{9}$ respectivamente para completar la unidad. Sin embargo sabemos que $\frac{1}{8}$ es mayor que $\frac{1}{9}$ y por lo tanto $\frac{7}{8}$ es menor que $\frac{8}{9}$.

Los ejemplos anteriores hacen referencia a la búsqueda de relaciones entre las fracciones que estamos comparando, es decir que se buscan argumentos para poder establecer entre ellas una relación de orden.

Ante la necesidad de comparar dos fracciones de distinto denominador se puede apelar también a transformarlas en fracciones equivalentes de igual denominador, buscando un denominador común que debe ser múltiplo común de los denominadores iniciales. Si se visualiza rápidamente el mínimo común múltiplo de los denominadores el cálculo se torna más cómodo y por lo tanto su elección resulta conveniente.

Por ejemplo para comparar $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$ consideramos el 24, que es un múltiplo común de 4, 3 y 6, obteniendo así las siguientes fracciones:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} = \frac{18}{24} \\ \frac{2}{3} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{16}{24} < \frac{18}{24} < \frac{20}{24} \text{ resulta entonces que } \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

Si observamos que 12 es múltiplo de 3, 4 y 6 tenemos que:

$\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$ y llegaríamos a la misma relación entre las tres fracciones iniciales que queríamos comparar.

También se pueden comparar fracciones apelando a la igualdad entre fracciones, planteada anteriormente. Por ejemplo podemos notar que si $\frac{3}{4}$ fuera equivalente a $\frac{4}{5}$ debería cumplirse que el producto de 3 x 5 debería ser igual al producto de 4 x 4. Sin embargo $15 < 16$ de donde $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

En resumen, si queremos comparar las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$ podríamos utilizar alguno de estos caminos:

A) $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ y $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ y como $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$, podemos concluir que $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

B) Si realizáramos el producto de medios por extremos, obtenemos:

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{4}{5} \Rightarrow 3 \times 5 < 4 \times 4$$

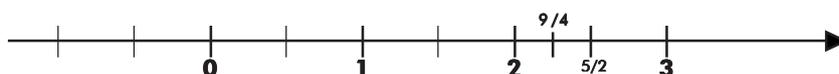
De donde $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Obsérvese que los numeradores de las fracciones equivalentes de denominador 20 halladas en **A)** son los productos obtenidos en **B)**.

No siempre es necesario proceder de una misma forma para establecer la relación de orden entre fracciones. Es conveniente analizar en cada caso los números en juego y decidir el procedimiento más pertinente.

3. Representación en la recta

Los números racionales pueden representarse en la recta numérica. Se puede establecer que a cada punto de la recta racional le corresponde un único número racional y recíprocamente a cada número racional le corresponde un único punto de la recta.

La recta numérica funciona como un soporte para poder solucionar situaciones de comparación de fracciones. Ubicando cada fracción en la recta y observando la posición se puede establecer el orden entre ellas. Ejemplo:



Para identificar $\frac{9}{4}$ sobre la recta numérica una manera posible sería encontrar el intervalo de números naturales al que pertenece. En este caso $2 < \frac{9}{4} < 3$. Podemos considerar $2 = \frac{8}{4}$ y $3 = \frac{12}{4}$.

Necesitamos subdividir el intervalo de extremos 2 y 3 en cuatro partes iguales para ubicar al punto que representa $\frac{9}{4}$. Análogamente procederíamos con la fracción $\frac{5}{2}$, observando que podemos escribir $2 = \frac{4}{2}$ y $3 = \frac{6}{2}$ por lo tanto $\frac{5}{2}$ está comprendida entre 2 y 3; subdividiendo el intervalo en mitades ubicaríamos el punto correspondiente a $\frac{5}{2}$, obteniéndose así la relación: $\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$

Asimismo la recta numérica permite visualizar que dado dos números racionales siempre es posible encontrar otro comprendido entre los números dados. Esta propiedad es característica de los números racionales y se denomina **Densidad**.

Por ejemplo ¿cómo podríamos hacer para encontrar un racional entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{4}$?

Una estrategia sería hallar la semisuma o promedio entre dichos números.

$$\frac{5}{4} + \frac{6}{4} = \frac{11}{4}$$

$\frac{11}{4} \div 2 = \frac{11}{8}$ es decir que hemos encontrado a $\frac{11}{8}$ tal que $\frac{5}{4} < \frac{11}{8} < \frac{6}{4}$

$\frac{11}{8}$ no es la única fracción comprendida entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{4}$ pues repitiendo el procedimiento podríamos

encontrar, por ejemplo, otra fracción entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{11}{8}$.

Otra forma de encontrar fracciones comprendidas entre dos dadas es expresar dichas fracciones a través de fracciones equivalentes del mismo denominador tales que las nuevas expresiones permitan intercalar otras:

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{20}{16} & < & \frac{21}{16} & < & \frac{24}{16} \end{array}$$

Volvemos a encontrar una fracción comprendida entre dos.

En definitiva hemos encontrado otra fracción $\frac{21}{16}$ que verifica: $\frac{5}{4} < \frac{21}{16} < \frac{6}{4}$

Pero también, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$ y $\frac{6}{4} = \frac{18}{12}$ y podemos ver que entre ellas podemos ubicar las fracciones $\frac{16}{12}$ y $\frac{17}{12}$.

Observando los ejemplos anteriores, ¿cómo obtendría fácilmente once fracciones comprendidas entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{4}$?

4. Expresión decimal de un número racional

Como todo número racional puede escribirse como fracción, admite también una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador entre el denominador. Por ejemplo $\frac{1}{2}$ tiene como expresión decimal $0,5$ y $\frac{1}{3} = 0,3$. Esto da lugar a dos tipos de expresiones decimales, las de período cero y las de período diferente de cero.

Por ejemplo $\frac{1}{2} = 0,50$ representa una expresión decimal de período 0. Obsérvese que el período es 0 pues después de la cifra 5 siguen infinitos ceros.

$\frac{1}{3} = 0,3$ representa una expresión decimal de período diferente de 0. El período es 3.

Tomemos otro caso, busquemos la expresión decimal de $\frac{1}{7}$. Al dividir uno por siete se obtiene $0,142857$ donde el período es 142857.

Siempre que el período sea distinto de cero estará formado por un número finito de cifras diferentes.¹⁷

Podríamos preguntarnos **si toda expresión decimal es un número racional.**

Existen expresiones decimales no periódicas que no se pueden expresar en forma de fracción. Por ejemplo podemos construir el número $97,18312917\dots$ donde las cifras decimales no se repiten nunca de la misma manera, es decir no hay una ley de formación. Así se construye un número que no es posible representar con una fracción porque no es periódico, por lo tanto no es un número racional. Estos números se llaman irracionales y serán los que completen la recta numérica.

¹⁷ Cuando dividimos un entero n por otro m , los restos posibles de dicha división están entre 0 y $(m - 1)$ por lo cual existen exactamente m posibilidades para dichos restos. En nuestro último ejemplo $n = 1$ y $m = 7$ por lo tanto hay sólo 6 restos diferentes posibles, en este caso ellos son: 3, 2, 6, 4, 5, 1. De continuar con la división, estos restos, se repiten, obteniéndose el período.

Uno de los irracionales más “populares” y que hace su entrada en la escuela es el número pi. También son irracionales los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

4. Operaciones

ADICIÓN DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar dos fracciones de distinto denominador tendremos que transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{9}{12} + \frac{14}{12} = \frac{23}{12}$$

La adición de números racionales cumple las mismas propiedades que la adición de números enteros.

¿Cuáles son dichas propiedades?

Conmutativa: $\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{7}{6} + \frac{3}{4}$

Asociativa: $\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \left(\frac{7}{6} + \frac{1}{2}\right)$

Existencia de Neutro: $\frac{3}{4} + 0 = 0 + \frac{3}{4}$

Existencia de opuesto: $-\frac{3}{4}$ es el opuesto de $\frac{3}{4}$ porque $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0$

La propiedad de existencia del opuesto de todo número racional permite que la sustracción se realice sin problemas dentro del conjunto de los números racionales. Esta propiedad es “heredada” desde la adición del conjunto de los enteros donde siempre existe opuesto, salvo el 0, que no lo posee. Es decir que siempre es posible realizar la sustracción de dos números Enteros: $4 - 7 = 4 + (-7) = -3$.

De la misma manera, esta propiedad garantiza que siempre es posible realizar la sustracción entre dos números racionales, pues existe el opuesto de todo racional salvo para el cero.

MULTIPLICACIÓN

El producto de dos fracciones puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \frac{3}{4} \times \frac{7}{6} = \frac{3 \times 7}{4 \times 6} = \frac{21}{24}$$

La multiplicación de fracciones admite las mismas propiedades que la adición de fracciones: conmutativa, asociativa, existencia de neutro (en este caso es el uno) y agrega una nueva propiedad: **la existencia del inverso**. Su enunciado se puede expresar así: **todo número racional $\frac{a}{b}$, salvo el 0, tiene inverso $\frac{b}{a}$, tal que $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$**

Esta propiedad permite que la **división** entre números racionales siempre sea posible, en consecuencia siempre es posible la división de fracciones. Recordamos que todo número racional se puede expresar en forma fraccionaria.

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$ es decir que el cociente de dos fracciones es el producto de la "primera fracción" por la inversa de "la segunda".

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \div \frac{7}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{18}{28}$$

¿ $\frac{12}{28}$ podría ser el inverso de $\frac{7}{3}$?

Una de las formas de saberlo es buscar el producto de $\frac{12}{28} \times \frac{7}{3} = \frac{84}{84} = 1$

Obtuvimos el neutro de la multiplicación por lo tanto dichas fracciones son inversas.

Otra manera sería apelar a la equivalencia de fracciones. Al simplificar $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ por lo tanto $\frac{3}{7}$ es el inverso de $\frac{7}{3}$.

De lo anterior se deduce que el inverso de un racional **no** tiene solamente una expresión.

Recordamos que cada racional admite infinitas expresiones fraccionarias que lo representan.

Existe otra propiedad que relaciona la multiplicación con la adición de racionales.

Es la propiedad distributiva de la multiplicación ante la adición:

$$\frac{5}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{6} \right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{2} \times \frac{7}{6}$$

5. Desde el conjunto de los números naturales hasta el conjunto de los números racionales

Sabemos que las operaciones posibles que se pueden realizar en el conjunto de los números naturales son la adición y la multiplicación, porque la sustracción y la división son posibles pero con restricciones. Para la sustracción es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo, de lo contrario el número resultante no es un elemento del conjunto de los números naturales. En la división el dividendo debe ser múltiplo del divisor. Por ejemplo, en la división 10: 3, 10 no es múltiplo de 3, porque no existe un número natural tal que multiplicado por 3 de como resultado 10.

Al "ampliar" el conjunto de los números naturales¹⁸ y obtener el conjunto de los números enteros se agrega, sin restricciones, una tercera operación posible en este nuevo conjunto, la sustracción.

El conjunto de los números enteros (Z) lo obtenemos realizando la unión del conjunto de los números naturales con sus simétricos respecto del 0.

Es decir: $Z = N \cup Z^-$ o bien $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$

Tenemos pues que en el conjunto de los números enteros las únicas operaciones posibles son la adición, la multiplicación y la sustracción. Aún no es posible, en dicho conjunto, realizar siempre la división, porque por ejemplo, no existe el cociente de $12 \div 5$, pues no existe un número entero tal que multiplicado por 5 de como resultado 12. Es por eso que surge la necesidad de "ampliar" ahora el conjunto de los enteros para que esta dificultad sea salvada y se pueda definir la división como una operación.

¹⁸ Consideramos en todo momento al "0" como elemento del conjunto de los números Naturales.

Entonces la adición, la multiplicación, la sustracción, la división son operaciones en este nuevo conjunto: el conjunto de los números racionales.

Esta idea de ampliación de conjuntos nos permite visualizar la relación de inclusión que existe entre los conjuntos numéricos naturales (N), enteros (Z) y racionales (Q). En símbolos la podemos expresar: $N \subset Z \subset Q$.

Es decir que todo número natural es un número entero, que todo entero es un racional y por consecuencia todo número natural también es un número racional.

De otra manera todo número natural y entero se puede escribir como una fracción.

Los siguientes esquemas pretenden ayudar a observar la relación de inclusión entre los conjuntos de números naturales, enteros y racionales.

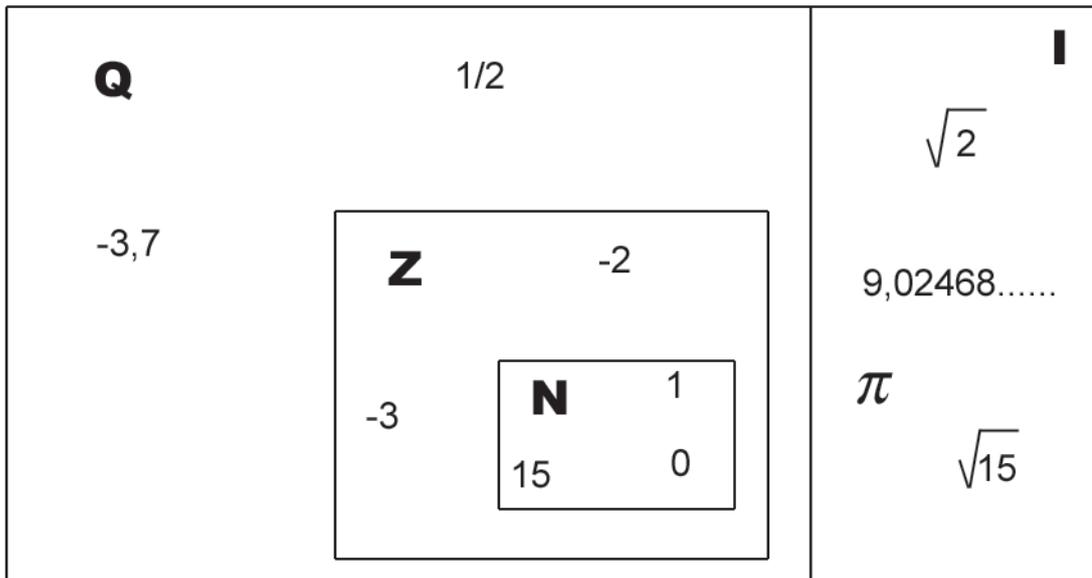
Ejemplo	N	Z	Q
16	x	x	x
-6		x	x
1/2			x
12/4	x	x	x
4,0	x	x	x

Por ejemplo, la tabla nos informa que “dieciséis pertenece al conjunto de los números naturales, al conjunto de los números enteros y al de los racionales”

En símbolos: $16 \in N$; $16 \in Z$ y $16 \in Q$

De igual manera se interpreta el resto de las filas: - $-6 \notin N$; $-6 \in Z$ y $-6 \in Q$

R



El diagrama muestra la inclusión del conjunto de los números naturales en el conjunto de números enteros y la de los números enteros en el conjunto de los racionales. Obsérvese que el conjunto de los racionales y de los Irracionales son disjuntos, es decir, no tienen elementos en común. Recordar que en el desarrollo nombramos los números Irracionales y dimos una pauta de una posible formación. La unión del conjunto de los racionales con el conjunto de los números irracionales determina el conjunto de los números reales.

SECUENCIAS DE ENSEÑANZA

De las actividades propuestas en **Nivel inicial 5 años**, nueve corresponden a reparto, once a la categoría relacionar y tres actividades están vinculadas con la medida. En esta sección se presenta una selección de las mismas.

- En algunas de las propuestas de la categoría **repartir** se trabaja con magnitudes discretas: fichas, niños, lápices. La cantidad a repartir, por ser múltiplo de la cantidad de partes, posibilita la realización de repartos exhaustivos. En estas actividades varía el tipo de elementos a repartir, su presentación, así como la cantidad a repartir y el número de partes (dividendo y divisor). El “tipo de elementos”, la “presentación”, y los “números en juego”, se constituyen en variables didácticas.¹

- Con estas 8 fichas ustedes tienen que formar 2 montones iguales.

.....

- ¿Cuántas fichas pusieron en cada montón?
- A diez nenes de la clase los vamos a ubicar en 2 mesitas. En cada mesita tiene que haber la misma cantidad de niños. Ustedes tienen que dibujar en la hoja los nenes que se ubicarán en cada mesa.
- La maestra quiere darle a 3 nenes la misma cantidad de lápices. Tiene todos estos (presentar una hoja con el dibujo de 12 lápices) ¿ Cuántos lápices le tiene que dar a cada nene?

En otras actividades se trabaja con magnitudes continuas², posibilitando la obtención de cocientes fraccionarios. En algunos casos el dividendo es menor que el divisor y en otros el dividendo es mayor que el divisor (no múltiplo de éste) por lo que el cociente podrá expresarse como fracción o como número mixto. Todos los cocientes podrán expresarse como medios o cuartos.

- Tengo una barrita de cereal para repartir entre 2 niños. ¿Cuánto le doy a cada niño? Hazlo en la hojita.
- La mamá compró 2 alfajores para sus 4 hijos. ¿Cuánto le tiene que dar a cada uno para que no se enoje ninguno? Ustedes tienen que anotar en la hoja.
- Tengo 5 barritas de cereal para repartir entre dos niños. ¿Cuánto le tengo que dar a cada uno? Yo no me quedo con nada. Hazlo en la hojita.
- Si la mamá tiene un alfajor y le quiere dar a sus 4 hijos la misma cantidad y que no le sobre nada ¿cuánto le toca a cada uno de los niños?
- Ahora tienes 3 alfajores y quieres darle a 4 nenes la misma cantidad y que no te sobre nada. ¿Cuánto le toca a cada uno de los niños?

- En la categoría **relacionar** se propone trabajar con puzzles de cartón para componer la unidad (“el todo”) a partir de distintas piezas. Se pretende que los alumnos comiencen a establecer relaciones entre la cantidad de partes y el tamaño de las mismas, pudiendo observar que la unidad puede componerse de distintas formas de acuerdo a las piezas que se elijan.

Cantidad de piezas (“dos piecitas”, “la menor cantidad de piezas”, “la mayor cantidad de piezas”) y características de las mismas (“piecitas iguales”) se constituyen en variables didácticas. El trabajo con estas diferentes situaciones favorece el establecimiento de relaciones entre el tamaño de las piezas, la cantidad de éstas y el todo.

¹Se llama variable didáctica a aquellos aspectos de la actividad que al ser modificados intencionalmente por el docente generan cambios en los procedimientos de resolución empleados por los alumnos.

² Las barritas de cereal y los alfajores son elementos discretos pero las situaciones los hacen “funcionar” como magnitudes continuas ya que cada unidad puede dividirse.

El material utilizado en estas actividades es un cartón de forma rectangular que representa "el todo" y piezas de diferente forma e igual color (rectángulos, triángulos) que representan medios y cuartos³.

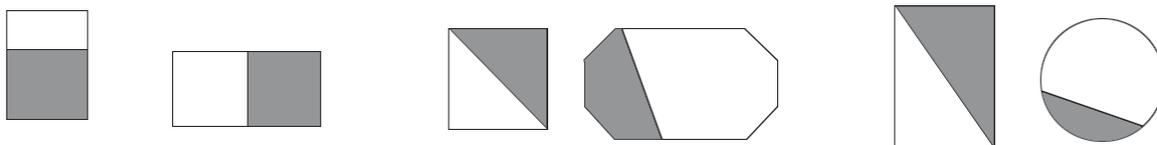
- Ustedes tienen un cartón y piecitas. Van a tener que "rellenar" el cartón con dos piecitas.
- Ustedes tienen un cartón y piecitas. Van a tener que "rellenarlo" con piecitas iguales.
- Ahora ustedes van a rellenar la pieza grande (el cartón) con piecitas diferentes, pueden utilizar las que ustedes quieran.
- Tienen que rellenar el cartón con poquitas piezas. Deben utilizar la menor cantidad posible.
... ..
Y ahora lo van a "rellenar" con muchas piezas. Deben utilizar la mayor cantidad posible.
- Cada pareja tiene que armar el cartón.
... ..
¿Por qué una pareja utilizó tan poquitas y la otra utilizó muchas? ¿Me pueden explicar?

Otras actividades apuntan a completar la unidad a partir de una de sus partes. Exigen además poner en juego la equivalencia de las partes así como también nombrar esas partes.

- Completa el cartón con dos piezas.
Yo voy a sacar una pieza de éstas que pusiste y tú tienes que cubrir ese espacio utilizando dos piecitas.
.....
Y ahora vas a completar ese mismo espacio pero utilizando cuatro piecitas.
.....
Me puedes explicar por qué se puede hacer de distintas formas.
- Yo pongo esta pieza (utilizar una pieza que representa $\frac{1}{4}$ pero que tenga diferente forma que en la actividad anterior) y tú me tienes que pedir otras para completar el cartón.
.....
Ahora yo pongo esta pieza $\frac{1}{4}$ y tú tienes que poner las demás para completar el cartón.

Se plantean además actividades para reconocer y representar mitades utilizando magnitudes continuas.

- Marca la figura que tenga pintada la mitad. ¿Cómo sabes que es la mitad?



- Te doy esta hoja y tú la tienes que partir a la mitad.
.....
¿Me puedes contar cómo sabes que es la mitad?
• Ahora tú tienes que dibujar una figura y dividirla a la mitad.

- La categoría **medir** plantea actividades cuya resolución exige expresar la medida de una cantidad de longitud. Esta medida está representada en algún caso por un número natu-

³ El material está formado por un cartón base: rectángulo de 16 cm de ancho y 24 cm de largo. Piezas de un mismo color, diferente al color del cartón base:

Rectángulos

cuatro de 16cm de largo y 12cm de ancho

cuatro de 24cm de largo y 8cm de ancho

cinco de 12cm de largo y 8cm de ancho

cinco de 24cm de largo y 4cm de ancho

cinco de 16cm de largo y 6cm de ancho

Triángulos

tres triángulos rectángulos cuyos catetos midan 16cm y 24cm

ral y en otros por una fracción. En alguna de las actividades puede surgir la expresión de la medida a través de un número mixto.

El material utilizado está compuesto por bandas de cartón de diferentes colores y longitudes.

- ¿Cuánto mide la banda rosada? Para medirla puedes utilizar la amarilla.
¿Cuánto mide la verde? Para medirla puedes utilizar la amarilla.
(la banda rosada es el doble de la amarilla, la banda verde es la mitad de la amarilla)⁴
- Ustedes tienen dos tiras, una amarilla y una roja. Deberán darle la orden a los otros compañeros para que ellos construyan una tira igual a la más corta de ustedes. Tengan en cuenta que ellos tienen la tira amarilla igual a la de ustedes y una roja larguísima. (la banda roja de los emisores es la mitad de la amarilla).
- Queremos saber cuál de las dos líneas que están dibujadas en el patio es más larga (una curva y una recta). Para medirlas pueden usar estos materiales (cuerda o banda) que les doy. Para no olvidar la medida pueden anotar en una hojita.⁵

En **primer año** el recorrido se compone de once actividades de la categoría *repartir*, doce actividades en la categoría *relacionar* y tres pertenecientes a la categoría *medir*.

- La categoría **repartir** incluye algunas actividades en las que la cantidad a repartir, por ser múltiplo de la cantidad de partes, posibilita la realización de un reparto exhaustivo. En estas actividades varían los beneficiarios del reparto. Mientras que en algunos casos los niños que realizan el reparto están incluidos en él, en otras oportunidades, los beneficiarios del reparto son otros.

- Yo quiero repartir estas 18 hojitas entre ustedes dos. A cada uno le tengo que dar la misma cantidad.
¿Cuánto le toca a cada uno?
- Tengo 18 figuritas y quiero darle la misma cantidad a 3 nenes. Yo no me quedo con ninguna. ¿Cuántas le doy a cada uno?
- Con 22 nenes de la clase vamos a formar dos equipos iguales. ¿Cuántos nenes tendremos que poner en cada equipo?

Otras actividades plantean situaciones en las que se obliga a decidir sobre la posibilidad del reparto exhaustivo en función del material a repartir. La variable “materiales” es la que permite la exhaustividad del reparto. A partir de las actividades se pretende establecer la diferencia de los materiales (unos que se pueden partir y otros no). En el caso de las magnitudes continuas se habilita el cociente fraccionario.

- Quiero repartir 7 autitos entre 2 niños. A los dos les tiene que tocar la misma cantidad. ¿Cómo hago?
- Quiero repartir 7 barritas de cereal entre 2 nenes. A los dos les tiene que tocar la misma cantidad.
Dibuja cómo tengo que hacer el reparto.
- Quiero repartir 11 figuritas entre 2 niños. A los dos les tiene que tocar la misma cantidad. ¿Cómo hago?
- Quiero repartir 11 chocolates entre 2 niños. A los dos les tiene que tocar la misma cantidad. ¿Cómo hago?⁶
- Quiero repartir 9 barritas de cereal entre 2 nenes. A los dos les tiene que tocar la misma cantidad. Dibuja el reparto realizado.
- Mamá compró seis barritas de cereal para repartir entre sus cuatro hijos. Les quiere dar lo mismo a cada uno.
¿Cómo hace?
- Mamá compró tres alfajores para sus cuatro hijos. ¿Cómo los repartió para darle a cada uno la misma cantidad?

Se presenta una actividad de comparación de repartos en la que se puede discutir su equivalencia a partir de los resultados.

⁴ Esta información es para el maestro, a los niños no se le dan a conocer estas relaciones en ninguna de las actividades de medición.

⁵ Material: una cuerda de 80cm y una banda de 80cm. Longitud de las líneas dibujadas : la línea recta 3 unidades y media y la curva 2 unidades y media .

⁶ Esta actividad pone en juego los mismos números que la anterior pero representando magnitudes distintas. En este caso los chocolates podrán ser repartidos exhaustivamente mientras que las figuritas no.

- Unos niños reparten alfajores entre otros 4 niños. Unos lo hicieron así (dibujar en el pizarrón dos alfajores divididos en mitades) y otros dos así (dibujarlos divididos en cuartos). Ustedes van a tener que decir en cuál de los dos repartos le toca más a cada niño. También van a tener que explicarnos por qué les parece que es así.

- En la categoría **relacionar** se incluyen actividades en las cuales se deberá cubrir unidades (“todo”) a partir de piezas (“partes”) que representan diferentes fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.

Se centra la atención en la relación tamaño de la parte y cantidad de partes. Algunas de estas actividades coinciden con las presentadas en el Nivel Inicial -5 años- pero aquí se apunta a que los niños intenten encontrar nuevas relaciones, por ejemplo que “dos medios es igual a cuatro cuartos”.

- Ustedes tienen un cartón y piecitas. Van a tener que “rellenar” el cartón con dos piecitas.⁷
- Ustedes tienen un cartón y piecitas. Van a tener que “rellenar” con piecitas iguales.
- Ahora ustedes van a rellenar la pieza grande (cartón) con piecitas diferentes, pueden utilizar las que ustedes quieran.

Aparecen otras actividades en las cuales los alumnos deben comunicar la forma de completar el puzzle. Esto obliga a nombrar numéricamente las piezas.

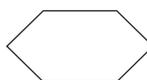
- Cada pareja tiene que cubrir el cartón. Lo vamos hacer así:
La pareja uno, lo va a cubrir de la forma que quiera. La otra pareja no puede ver cómo lo hacen ustedes. Cuando esté pronto le tienen que decir a esta otra pareja de qué manera rellenaron el cartón para que ellos lo hagan de la misma forma. (Se trabaja con piezas de igual color).

Finalmente se proponen actividades en las que se solicita reconocer y/o representar mitades en cantidades continuas y discretas.

- Pinta la mitad de este dibujo: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

- Encierra la mitad de este otro: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

- Pinta la mitad de esta figura:



- En la categoría **medir** se presentan actividades en las que los alumnos deberán medir y/ o construir bandas de acuerdo a ciertas condiciones dadas.

- Con la banda amarilla van a medir el largo de la cartelera. (u otro objeto de tal longitud que no sea necesario fraccionar la unidad - banda amarilla- para su medición).
- Ustedes tienen dos bandas una amarilla y una roja. (La banda roja es el doble de la amarilla)⁸ Queremos saber la medida de la amarilla. Tienen que usar la roja para medirla.
- Deben construir una banda de papel cuya longitud sea “la mitad” de la banda roja. Ahora van a construir una banda de papel cuya longitud sea “una vez y media” la banda roja.

En **segundo año** se realizan catorce actividades correspondientes a la categoría *repartir*, once vinculadas al establecimiento de *relaciones* y tres vinculadas a la *medida*.

- En la categoría **repartir** se presentan algunas actividades en las cuales es necesario decidir sobre la posibilidad de la exhaustividad del reparto en función del tipo de magnitud a repartir (discretas o continuas). Se incluyen actividades que involucran los mismos

⁷ El material con el que se trabaja es el mismo que el usado en Nivel Inicial.

⁸ Esta información es para el maestro, a los niños no se le informan estas relaciones.

números pero diferentes magnitudes. Los cocientes resultantes de estos repartos son números fraccionarios menores o mayores que uno. En este nivel aparecen medios, cuartos y octavos y se pretende enfatizar la representación numérica de dichas cantidades.

- Ustedes tienen que repartir 27 chapitas entre 3 niños.
- En la clase somos 26 niños. Necesitamos hacer 4 equipos iguales. ¿Cómo hacemos?
- Nos regalaron 26 litros de jugo. Queremos ponerlos en 4 jarras que tengan la misma cantidad. ¿Cómo hacemos?
- Mamá compró 15 barritas de cereal para repartir entre 6 niños. Les quiere dar a todos la misma cantidad. ¿Cómo las repartió?
... ..
¿Y si las barritas fueran 25 para repartir entre 4 niños?
- Tenemos 5 alfajores para darle a 4 niños. Siempre le damos la misma cantidad a cada uno. ¿Cuánto le tenemos que dar a cada uno?
- Tenemos 4 alfajores para distribuir entre 8 niños. Todos quieren tener la misma cantidad. ¿Cuánto le tenemos que dar a cada uno?
... ..
¿Y si tuviéramos 6 alfajores para repartir entre 8?

En este grado se avanza con respecto a los anteriores al incluir actividades en las que se ponen en juego expresiones equivalentes para un mismo reparto. Se promueve la reflexión sobre la equivalencia de las fracciones obtenidas, reconociéndolas como dos formas de escribir la misma cantidad. Aparecen también actividades en las que se analizan las relaciones entre el dividendo, el divisor y el cociente.

- (Se dibuja en el pizarrón un chocolate repartido entre dos nenes).
Observen el dibujo de Valeria. Luego ustedes deberán hacer el de Mariana.
En el dibujo de Mariana sabemos que hay el doble de nenes y el doble de chocolates que en el de Valeria.
¿En cuál de los dos repartos creen ustedes que le toca más chocolate a cada niño? ¿En el de Valeria o en el de Mariana?
- (Dibujo del reparto de Manuel: un chocolate para dos niños)
Observen el dibujo de Manuel. Luego ustedes deben hacer el de Pablo.
En el dibujo de Pablo hay el doble de nenes que en el de Manuel.
¿En cuál de los dos repartos creen ustedes que le toca más chocolate a cada niño?
- En el dibujo de Mariana hay 5 chocolates y dos nenes.
En el de Pablo hay 10 chocolates y dos nenes.
¿En cuál de los repartos creen que le toca más chocolate a cada nene?

En las actividades precedentes puede observarse que en la primera (Valeria y Mariana) se duplican el divisor y el dividendo, obteniéndose por lo tanto el mismo cociente. En el segundo caso (Manuel y Pablo) sólo se duplica el divisor por lo que el cociente varía. En el tercer caso (Mariana y Pablo) se duplica sólo el dividendo. En los dos últimos casos es interesante promover la búsqueda de nuevas relaciones como por ejemplo “si se duplica el divisor manteniendo el dividendo, el cociente es la mitad” o “si duplico sólo el dividendo, el cociente es el doble”. Con los alumnos no se hablará de dividendo, divisor y cociente, solamente se observarán las relaciones. Por ejemplo “si tengo el doble para repartir y la misma cantidad de niños entonces...”

Finalmente se incluyen actividades en las que se debe encontrar el dividendo (cantidad inicial a repartir) a partir del cociente (resultado del reparto) y del divisor (cantidad de partes). En otras se debe reconstituir el divisor a partir del cociente y del dividendo.

- Natalia quiere convidar a sus tres amiguitos dándole medio alfajor a cada uno. Ella también comerá la misma cantidad. ¿Cuántos alfajores tendrá que comprar?
- Ana quiere convidar a 6 amigos con media barrita de cereal a cada uno. ¿Cuántas tendrá que comprar?
- Carolina lleva siempre dos alfajores y un chupetín de merienda.
Hoy algunos compañeros no trajeron merienda. Ella quiere darle a cada uno medio alfajor y ella se queda con el chupetín. ¿A cuántos niños puede convidar?

- Ramiro, Juan, José y María tienen alfajores. Cada uno me da medio alfajor. ¿Cuántos alfajores tengo?
... ..
¿Y si cada uno me hubiera dado un cuarto de alfajor?

- En la categoría **relacionar** se presentan actividades que ponen en juego las relaciones parte – todo y las relaciones de las partes entre sí apuntando a la problematización de las mismas.

El material (puzzle) a utilizar en estas actividades es el mismo que se describió para el Nivel Inicial pero se agregan piezas de diferente forma que representan octavos⁹ Si bien algunas de estas actividades corresponden a las propuestas para grados inferiores, en este nivel los alumnos tienen la posibilidad de nuevas composiciones del todo (por mayor variedad de piezas). Además, en esta instancia, se “obliga” a utilizar representaciones numéricas.

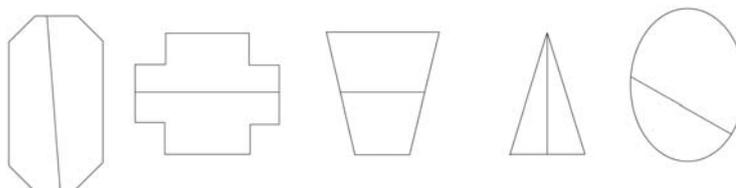
- Ustedes tienen un cartón y piecitas. Van a tener que “rellenar” el cartón con dos piecitas.
- Ahora ustedes van a tener que “rellenar” el cartón con piecitas iguales.
- Completen el cartón de dos maneras diferentes. Tienen que anotar cómo lo hicieron.
- Ustedes tienen que cubrir el cartón con la menor cantidad de piezas posibles. Tienen que anotar como lo hicieron.
... ..
Ahora con la mayor cantidad de piezas. Tienen que anotar cómo lo hicieron.
- Acá tengo muchos triángulos del mismo color (mostrarlos). Ustedes tienen el mismo material en la mesita (piezas que representan medios, cuartos y octavos). Con las piezas que tienen deben armar un rectángulo como éste. Si necesitan otras pueden venir a pedírmelas. Sólo pueden venir una vez. Las tienen que pedir por escrito, sin utilizar las palabras chico, mediano, grande.

Se plantean también actividades que apuntan a la composición del todo poniendo en juego la relación entre la unidad, la parte y la fracción involucrada a partir de la representación numérica.

- Necesitamos poner 1 litro de agua en un recipiente. Sólo tenemos botellas de medio litro para hacerlo. ¿Cómo se puede hacer?
... ..
¿Y si tuviésemos que completar 1 litro y $\frac{1}{2}$?
... ..
¿Y para poner 1 litro con botellas de $\frac{1}{4}$ ¿cómo harías?

- Finalmente vuelven a aparecer actividades de reconocimiento y producción de fracciones ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$) como en los grados anteriores. Se trata de presentar algunas figuras “no convencionales” para romper con el predominio de ellas (círculo, cuadrado y rectángulo).

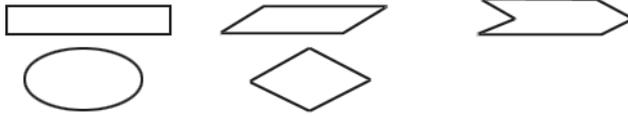
- Marca las figuras que están divididas en mitades.



Explica: ¿cómo sabes que son esas?

⁹ El material con el que se trabaja es el mismo que se usa en Nivel Inicial al que se agregan las siguientes piezas del mismo color.
Rectángulos:
diez de 8cm de largo y 6cm de ancho
diez de 12cm de largo y 4cm de ancho
Triángulos:
cinco triángulos rectángulos cuyos catetos miden 12cm y 16cm

- Pinta la mitad de cada figura.



Explica cómo sabes que pintaste la mitad.

- Pinta la mitad



- Pinta $\frac{1}{4}$ de esta figura 

- Pinta $\frac{1}{4}$ del total de las bolitas. ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

- En la categoría **medir**, las situaciones obligan a la utilización de las fracciones pero en un contexto de medida. Se pretende trabajar con actividades que se resuelven midiendo efectivamente, para lo cual los alumnos deben dividir la unidad dada o construir la unidad¹⁰ en forma conveniente.

- Ustedes tienen dos tiras. Tienen que darle la orden al otro equipo para que construya una tira igual a la más larga de ustedes. Tengan en cuenta que ellos sólo tienen la tira corta. (tira larga que mide 3 unidades y una banda que representa la unidad de medida).
- Ustedes tienen dos tiras, una amarilla y una roja. Deberán darle la orden a los otros compañeros para que ellos construyan una tira igual a la más larga de ustedes. Tengan en cuenta que ellos tienen la tira amarilla igual a la de ustedes y una roja larguísima. (tira roja que mide una unidad y media y tira amarilla que representa la unidad de medida).

Las actividades correspondientes a **tercer año** son diez de la categoría repartir, once corresponden a relacionar y tres a medir.

- La categoría **repartir** comienza, como en grados anteriores, planteando actividades en las que se pone en juego la posibilidad de decidir sobre la exhaustividad del reparto. En algunos casos se presentan los mismos números pero representando diferentes tipos de magnitudes. Se apunta a promover discusiones sobre la pertinencia del resultado cuestionando algunos hechos que se dan en el aula, como por ejemplo cuando el alumno dice no saber hasta "donde debe seguir la división".

- Juan quiere repartir, en partes iguales, 39 bolitas entre 6 niños.
María va a repartir, en partes iguales, 39 hojas entre 6 niños para hacer un collage.
¿Quién podrá repartir todo lo que tiene? ¿Cuánto le darán a cada uno en cada caso?
- Hay 68 kilos de harina para embolsar en 5 bolsas iguales ¿Cómo harías?
- Hay 68 caramelos para distribuir en 5 clases dándoles a cada grupo la misma cantidad ¿Cómo harías?
- Todos precisan la misma cantidad de hojas. Tenemos 45 para distribuir en 6 clases ¿Cómo harías?
- La maestra repartió algunas hojas entre los niños que se sientan en cada mesa. Le dio una hoja para dos niños de la mesa verde.
Tres hojas para cuatro niños de la mesa azul.
Tres hojas para 2 alumnos de la mesa roja.
¿Qué parte de la hoja recibió cada niño en cada caso?
(En cada mesa se deben repartir las hojas dadas por la maestra en partes iguales entre sus integrantes).

¹⁰ Unidad como cantidad de magnitud de la misma clase que se utiliza como patrón .

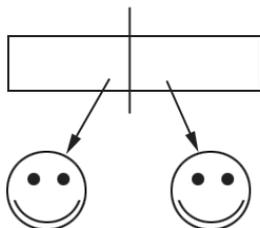
Se incluyen luego actividades en las que se reparten magnitudes continuas obteniéndose cocientes fraccionarios mayores o menores que uno. Se sostiene una misma propuesta variando los números que se ponen en juego.

- Quiero repartir 3 barritas de cereal entre 2 niños. ¿Cuánto le doy a cada uno?
...
¿ Y si fueran 25 barritas entre 4?
...
¿ Y si fueran 10 barritas entre 3 niños?
- Ahora quiero repartir 21 barritas de cereal entre 5 niños. ¿Cuánto le toca a cada uno?
...
¿Y si fueran 4 barritas entre 8?
...
¿ Y si fueran 2 barritas entre 3?
...
¿ Y si fueran 3 barritas entre 4?

Es importante observar que “el mismo problema con otros números”, no es tal, ya que la variación de los números da la posibilidad de que el alumno utilice otros conocimientos y otros procedimientos de resolución.

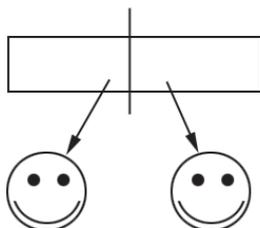
En otras actividades se proponen modificaciones del divisor y del dividendo obteniéndose fracciones equivalentes como distintas expresiones del mismo cociente.

- Observa el dibujo de Ana Clara y luego tu deberás hacer el de Josefina y el de Pablo.¹¹
Ana Clara.



En el dibujo de Josefina hay el doble de chocolates y el doble de niños que en el dibujo de Ana Clara. En el dibujo de Pablo hay el doble de chocolates y el doble de niños que en el dibujo de Josefina. ¿En cuál de los repartos crees que le toca más chocolate a cada niño? Explica por qué.

- Yo voy a dibujar el reparto que hizo Raúl. (Dibujo de Raúl)



Camilo quiere hacer otros repartos diferentes en los que a cada niño le toque lo mismo que en el reparto de Raúl.

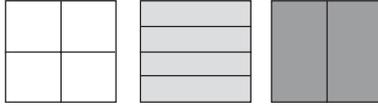
Ustedes tienen que dibujar repartos como los que quiere Camilo.

- Se quiere repartir 7 barritas de cereal entre 3 niños de tal forma que a cada niño le toque la misma cantidad y no sobre cereal. Dibuja tres formas distintas de repartirlo.

- En la categoría **relacionar** el énfasis está puesto en la relación entre el número de partes y el tamaño de las partes, así como en la constitución del todo a partir de una fracción.

¹¹ Estas actividades fueron adaptadas de las que se presentan en “Matemáticas. Cuarto grado”. Secretaría de Educación Pública. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos. México 2000

- En la clase tenemos distintas etiquetas. Las más grandes son para los libros, las medianas para los cuadernos y las chiquitas para las libretas de deberes. Se van hacer más etiquetas de esos tamaños con estas hojas.¹²



Tu debes completar esta tabla:

	Tamaño de la etiqueta	Cantidad de etiquetas por hoja
Hoja gris		
Hoja blanca		
Hoja gris oscuro		

- Si te pidiese que cubrieras el rectángulo con la mayor cantidad de piezas posibles ¿Cuáles elegirías?¹³
- Si te pidiese que cubrieras el rectángulo con la menor cantidad de piezas posibles ¿Cuáles elegirías?
- Ramiro, Juan, José y María comen alfajores.
Cada uno me da medio alfajor. ¿Cuántos alfajores tengo?
¿Y si cada uno me hubiese dado un cuarto de alfajor?

- Se hace un jugo. En la receta dice que hay que poner 1 litro de agua por cada sobre de jugo.

Tenemos botellas de $\frac{1}{2}$ litro y de $\frac{1}{4}$ litro. ¿Cómo hacemos?

Cantidad necesaria de jugo	Cantidad de botellas de $\frac{1}{4}$	Cantidad de botellas de $\frac{1}{2}$ litro
2 litros		
3 litros		
$1 \frac{1}{2}$ litro		

¿Podrías formar 4 litros usando botellas de $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ litro juntas?

- ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ litro puedo llenar con 1 litro?
¿Y con 1 litro y $\frac{1}{2}$?
¿Y con 2 litros?
- Para hacer 1 litro de jugo ¿cuántos vasos se necesitan en cada caso?
Unos niños lo resolvieron así:

Equipo 1 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Equipo 2 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

Equipo 3 $\frac{1}{4} \times 4$

Equipo 4 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

¿Está bien lo que hizo cada equipo? ¿Por qué?

¿Dónde está $\frac{1}{4}$ en lo que escribió el equipo 1?

¿Dónde está $\frac{1}{2}$ en lo que escribió el equipo 3?

¹² "Matemática. Cuarto Grado"- Secretaría de Educ. Pública- México 2000.

¹³ Se trabaja con el material descrito para 2do año.

- María dice que puede cubrir $\frac{1}{2}$ del cuadrado con dos piezas de $\frac{1}{4}$. Juan dice que no, que precisa cuatro de $\frac{1}{8}$. ¿Quién tiene razón?

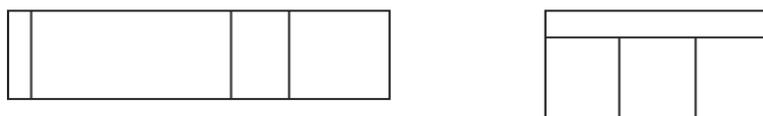
Las actividades siguientes de *reconocimiento* de fracciones apelan a presentaciones gráficas “no convencionales” ya que no se representa la unidad “con todas las partes iguales dibujadas”. En todos los casos son los alumnos los que deben tomar las decisiones poniendo en juego el concepto de fracción que implica equitatividad y exhaustividad del fraccionamiento de la unidad.

“Será una oportunidad de volver a analizar (...) que la única condición para que una parte represente, por ejemplo $\frac{1}{4}$, es que será necesario utilizar cuatro de las partes que se ofrecen para tener una cantidad igual al entero.(...) No alcanza con “mirar y ver” el entero partido en cuatro partes iguales sino que hace falta comparar cada parte con la unidad para ver qué parte representa¹⁴”

- En cuáles de estas figuras se pintó $\frac{1}{4}$? ¿Cómo lo sabes?



- Si en estas figuras hay $\frac{1}{4}$ dibujado, tienes que pintarlo.



Otras actividades obligan a encontrar una fracción para completar la unidad en forma numérica (lo que le “falta” a una fracción dada).

Tienen ciertas similitudes con otras ya presentadas en las que se debía completar jarras con jugo, pero en este caso se presentan directamente en un contexto matemático.

- ¿Cuánto le falta para llegar a 1?

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{1}{3}$

- ¿Cuánto le falta para llegar a 2?

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{1}{3}$

¹⁴ Sadovsky, P.- coordinación- (2005c)

- En la categoría **medir** se plantea la necesidad de comunicar una medida a los efectos de poder determinar una longitud. Estas medidas son expresadas en algunos casos como número natural, fracciones mayores o menores que uno.
 - Ustedes (equipo A) tienen dos tiras una roja y una verde. El otro equipo (equipo B) tiene una tira verde igual a la de ustedes y una tira roja larguísima. Ellos deben cortar la tira roja del mismo largo de la que tienen ustedes. Ustedes tienen que darle la orden al otro equipo para que puedan hacerlo. (la tira roja equivale a 3 verdes)¹⁵
 - Ustedes tienen dos tiras, una amarilla y una roja. Deberán darle la orden a los otros compañeros para que ellos construyan una tira igual a la más larga de ustedes. Tengan en cuenta que ellos tienen la tira amarilla igual a la de ustedes y una roja larguísima. (la tira roja equivale a una amarilla y media)
.....
 - Ustedes tienen dos tiras, una verde y una blanca. Deberán darle la orden a los otros compañeros para que ellos construyan una tira igual a la más corta de ustedes. Tengan en cuenta que ellos tienen la tira verde igual a la de ustedes y una blanca larguísima. (la tira verde equivale a la mitad de la blanca)
.....
¿Qué diferencia hay entre las dos actividades que hicieron?
 - Ustedes tienen dos tiras una roja y una verde. El otro equipo tiene una tira verde igual a la de ustedes y una tira roja larguísima. Ellos deben cortar la tira roja del mismo tamaño de la que tienen ustedes. Ustedes tienen que darle la orden al otro equipo para que puedan hacerlo. (la tira roja equivale a $\frac{5}{2}$ de la verde)
 - Ustedes tienen que construir una banda igual a la mía. Yo sé que esta banda entra una vez y media en la que ustedes van a construir. Primero van a tener que discutir en el equipo cómo lo van a hacer. Luego me dirán lo que pensaron y si necesitan algún dato o medida yo se los voy a proporcionar.

El trabajo de **cuarto año** así como el de los grados siguientes, profundiza en la categoría relacionar incluyendo la comparación y el cálculo “pensado”¹⁶ con fracciones.

Se presentan seis actividades de la categoría repartir, once de la categoría relacionar y dos de medida.¹⁷

- Se presenta en el tramo **repartir** una actividad para discutir la posibilidad de realizar un reparto exhaustivo o no, en función de la magnitud en juego. Las restantes actividades se dedican al reparto de magnitudes continuas con divisores mayores o menores que la unidad y a repartos equivalentes que ponen de manifiesto la posibilidad de expresar un mismo número con diferentes expresiones fraccionarias.
 - Se reparten 17 autitos entre 4 niños; todos reciben la misma cantidad. ¿Cuántos autitos le toca a cada uno?
 - Se reparten 17 chocolates entre 4 niños; todos reciben la misma cantidad. ¿Cuántos chocolates le toca a cada uno?
 - Martín colecciona autitos de carrera. Ya tiene 86 y quiere guardarlos en 4 cajas, de manera tal que todas tengan la misma cantidad. ¿Cuántos debe colocar en cada una?
 - Con una cinta de 86 cm se arman 4 moñas iguales. ¿Qué largo tiene cada moña?
 - Cuatro amigos deciden repartirse \$ 45 en partes iguales. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
 - Laura tenía un chocolate lo cortó en tres partes iguales y le dio una parte a Lucía. Nicolás tenía dos chocolates como los de Laura y los repartió en partes iguales entre sus 6 amigos. ¿Quién recibió más chocolate, Lucía o cada amigo de Nicolás?
- El tramo **relacionar** presenta actividades cuyo objetivo es la composición de la unidad a partir de diferentes fracciones, en forma numérica, en situaciones en contexto cotidiano

¹⁵ Esta información es para el maestro, a los niños no se le informan estas relaciones.

¹⁶ “Entenderemos por cálculo pensado, mental o reflexionado, el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados”. Parra, C. (1994)

¹⁷ Las actividades que se presentan para 4to., 5to. y 6to. año han sido elaboradas por el equipo de Patricia Sadovsky y fueron utilizadas con autorización de los autores. Las mismas están publicadas en este momento en “Sadovsky, P. (coordinación), Lamela, C; Carrasco, D; Quaranta, M.E; Ponce, H. Matemática(2005C). Fracciones y Números Decimales (4, 5, 6 y 7). Apuntes para la Enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.”

así como en contexto intramatemático. En este grado se avanza sobre los años anteriores, puesto que las relaciones son solamente numéricas (no apelan al significado parte todo). Se incluyen en este tramo actividades que implican la comparación de fracciones y el cálculo pensado.

- Los envases de café

(se presenta el dibujo de quince envases de $\frac{1}{4}$ kg, ocho de $\frac{1}{2}$ kg y un envase de 1 kg)

Necesito comprar $2\frac{1}{4}$ kg de café. En la góndola del supermercado sólo quedan los tamaños de paquetes que se ven en el dibujo. ¿Qué paquetes puedo comprar? ¿Hay una sola posibilidad? Si quiero llevar la menor cantidad posible de paquetes ¿cuáles debo elegir?

- ¿Se puede tener 1 kg usando sólo paquetes de $\frac{1}{4}$ kg?
- Si se agregan paquetes de $\frac{1}{3}$ kg, ¿pueden formarse $2\frac{1}{4}$ kg de café utilizando sólo envases de $\frac{1}{3}$ kg?
- Si se agregan paquetes de $\frac{1}{8}$ kg, ¿se pueden tener $2\frac{1}{2}$ kg usando sólo paquetes de $\frac{1}{4}$ kg y $\frac{1}{8}$ kg?

- Para pensar y contestar:

- ¿Cuántos medios se necesitan para formar un entero?
- ¿Cuántos sextos se necesitan para formar $\frac{1}{2}$?
- ¿Puedo formar un entero usando quintos?
- ¿Puedo formar medios usando quintos?

- Seguimos comprando café

¿Se puede tener $1\frac{3}{4}$ kg de café usando sólo paquetes de $\frac{1}{4}$ kg?

¿Y de $\frac{1}{3}$?

¿Y de $\frac{1}{6}$?

¿Y de $\frac{1}{8}$?

Si se puede formar la cantidad pedida, escribe en cada caso cuántos paquetes usarías y si no se puede formar, explica por qué.

- La mamá de Matías compraba todas las semanas 2 kilos de galletitas. Ella se armó una tablita que le permitía comprar rápidamente los paquetes de galletitas que necesitaba según el peso de cada paquete. ¿Cómo se completa la tabla?

Si los paquetes tienen	Necesito
$\frac{1}{4}$ kilo	
$\frac{1}{2}$ kilo	
$\frac{1}{3}$ kilo	
$\frac{1}{6}$ kilo	
$\frac{1}{8}$ kilo	

- La mamá de Juan que siempre salía de compras con ella quiso imitarla entonces armó su tablita. Ella compraba siempre 3 kilos de galletitas. ¿Es correcta la tabla que se armó? En caso que alguna cantidad de paquetes sea incorrecta, corrígela.

Si los paquetes tienen	Necesito
$\frac{1}{4}$ kilo	12 paquetes
$\frac{1}{2}$ kilo	6 paquetes
$\frac{1}{3}$ kilo	10 paquetes
$\frac{1}{6}$ kilo	16 paquetes
$\frac{1}{8}$ kilo	24 paquetes

- El almacenero que no se quedaba atrás tomó rápidamente la idea y se armó su propia tabla.

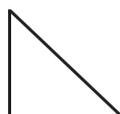
Peso del paquete	Para 1 kilo	Para 2 kilos	Para 5 kilos	Para 10 kilos
$\frac{1}{8}$ kilo				
$\frac{1}{4}$ kilo				
$\frac{1}{2}$ kilo				

En las dos actividades siguientes se plantea la determinación de la unidad a partir de una fracción con numerador uno, presentada como $\frac{1}{n}$ en los dos primeros casos o como $\frac{m}{n}$ en el tercero (numerador diferente de uno). En esta última actividad la dificultad es mayor pues no basta con iterar la parte dada un determinado número de veces para construir la unidad sino que es necesario primero encontrar la tercera parte para poder resolverlo. Esta situación obliga a los alumnos a dividir el rectángulo dado entre dos para encontrar un tercio de la unidad. Cuando partimos de fracciones del tipo $\frac{m}{n}$ con $m < n$ y deseamos encontrar "lo que le falta" para llegar a la unidad, dividimos en "m partes" dicha fracción. En nuestro caso $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Claro está que si partimos siempre de la unidad $\frac{n}{n}$ esta dificultad nunca aparecería, seguiríamos "dividiendo por el de abajo y multiplicando por el de arriba" para encontrar una fracción de ella.

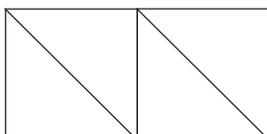
- Se sabe que este rectángulo representa $\frac{1}{4}$ del entero. Dibuja el rectángulo entero. ¿Hay una sola posibilidad?



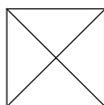
- Se sabe que este triángulo representa $\frac{1}{4}$ de una figura. ¿Cómo es la figura entera?



La respuesta de Marcela fue la siguiente:



Y la respuesta de Martín fue ésta.



¿Quién de los dos resolvió correctamente el problema? Argumenta.

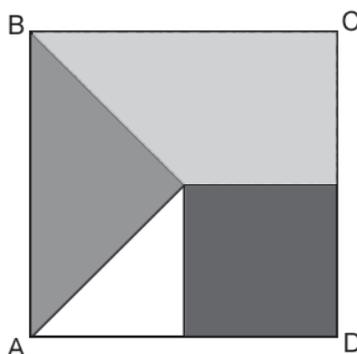
- Se sabe que el siguiente rectángulo representa $\frac{2}{3}$ de cierto entero. ¿Cómo es ese entero? ¿Hay una única solución?



(El largo del rectángulo es de 4 cm, el ancho de 1 cm.)¹⁸

En este grado se retoma el *reconocimiento de fracciones* en una unidad dada sin que aparezcan todas las partes representadas. La resolución implica comparar cada "pieza" con la unidad.

- Si consideramos el cuadrado ABCD como la unidad, ¿qué parte de ella representa cada figura?



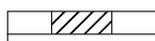
- ¿En cuáles de los siguientes dibujos se pintó la cuarta parte? Explica cómo lo pensaste en cada caso.



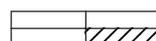
Dibujo 1



Dibujo 2



Dibujo 3



Dibujo 4

Las actividades siguientes proponen la *comparación de fracciones* con la unidad o la comparación entre fracciones, también se propone buscar lo que "le falta" a una fracción para obtener una unidad. Se pretende establecer relaciones numéricas entre una fracción y la unidad cuando ésta es representada por un número natural.

- ¿Cuánto les falta para llegar a 1?

$$\frac{1}{4} + \dots = 1$$

$$\frac{3}{7} + \dots = 1$$

$$\frac{2}{5} + \dots = 1$$

$$\frac{10}{11} + \dots = 1$$

$$\frac{15}{20} + \dots = 1$$

¹⁸ Esta información es para el maestro, a los niños no se le informan estos datos.

- ¿Cuánto les falta para llegar a 2?

$$\frac{3}{7} + \dots = 2$$

$$\frac{9}{5} + \dots = 2$$

$$\frac{11}{7} + \dots = 2$$

$$\frac{110}{25} + \dots = 2$$

Anoten cómo lo pensaron.

Finalmente se abordan actividades de *cálculo pensado* con fracciones. En estos casos se enfrenta a los alumnos a la multiplicación o división del numerador o denominador o a trabajar con fracciones equivalentes.

- Completa la tabla:

Fracción	Mitad
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{8}$	
$\frac{2}{8}$	
$\frac{3}{8}$	
	$\frac{3}{5}$
	$\frac{2}{6}$

- Para discutir:

Con relación a la actividad anterior; Nico opina que si $\frac{2}{6}$ es la mitad de una fracción entonces la fracción es $\frac{4}{6}$. En cambio Laura opina que es $\frac{2}{3}$. ¿Tú que opinas? ¿Quién tiene razón?

- En el tramo correspondiente a **medida** se pretende medir longitudes expresando dichas medidas con fracciones. En algunos casos la longitud solicitada es una fracción menor que la unidad y en otros es mayor que la misma, lo que obliga a los alumnos a fraccionar la unidad para poder resolver la situación.

No es lo mismo construir una longitud doble de una dada que construir la unidad sabiendo que la longitud dada es $\frac{1}{2}$ de la unidad. Los procedimientos y estrategias que implican cada una son diferentes. Es interesante destacar que problemas aparentemente iguales pueden ser distintos - aunque en ambos se trate de medir como en este caso - y problemas aparentemente distintos porque se cambia el contexto, pueden ser iguales si implican el mismo conocimiento.

- Envíen a la otra pareja las instrucciones necesarias para que puedan construir un rectángulo igual al que tienen ustedes. Para medir pueden utilizar solamente esta tira, pueden plegarla pero no medirla con regla. (Largo del rectángulo: $\frac{3}{2}$ unidad; ancho del rectángulo: $\frac{2}{3}$ unidad)¹⁹
- Dibuja un segmento que mida la tercera parte de éste. (Dar dibujado un segmento de 12 cm)
- Usando el segmento anterior como unidad, indica la medida de estos segmentos. (Dar dibujados segmentos de 2cm, 3cm, 4 cm, 6cm, 8cm y 15 cm)
- Dada esta tira (16 cm) que representa la unidad, construye otras tiras cuyas longitudes sean:
 - $\frac{1}{4}$ de la unidad
 - $\frac{1}{8}$ de la unidad
 - $\frac{5}{4}$ de la unidad
 - $\frac{3}{2}$ de la unidad
- Si esta tira (16 cm) representa $\frac{1}{2}$ la unidad ¿cuál fue la unidad utilizada?
¿Y si representa $\frac{1}{3}$?

En **quinto año** se continúa con las categorías anteriores y se agregan actividades dentro del tramo relacionar con el objetivo de trabajar el cálculo pensado y el “orden” usando como soporte la recta numérica.²⁰

En todos los casos se solicita argumentación de las respuestas por parte de los alumnos. Se presentan ocho actividades de reparto, quince situaciones en la categoría relacionar en la que se incluyen también orden y cálculo pensado y trece situaciones en las que la fracción aparece representando una medida.

- En la categoría **repartir**, por ejemplo, se presentan algunas actividades en las que los repartos están dados, lo que exige a los alumnos argumentar acerca de la equivalencia o no de los mismos.
 - Para repartir 23 chocolates entre 5 chicos, Vanesa pensó lo siguiente: “23 chocolates entre 5 me da 4 chocolates para cada uno, pues $4 \times 5 = 20$ y me sobran 3 chocolates que los corto cada uno en cinco partes y entrego una parte de cada chocolate a cada uno.” En cambio Joaquín lo pensó así: “le doy 4 chocolates a cada uno igual que Vanesa pero con los 3 chocolates que quedan, corto cada uno por la mitad y le doy una mitad a cada chico, luego divido el último medio en cinco y le doy una parte a cada uno”. Analiza si son o no equivalentes los repartos de Vanesa y de Joaquín. Luego anota las expresiones fraccionarias que surgen de cada reparto, analiza y argumenta si son o no equivalentes. Si piensas que las expresiones fraccionarias son equivalentes, encuentra un modo de “pasar” de una a otra.
- En la categoría **relacionar** aparecen actividades en las que se solicita determinar la unidad a partir de una fracción del tipo $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$, o de un número mixto. Se abordan situaciones que involucran el orden a partir de la comparación de fracciones.
 - Martín trabaja en un negocio mayorista de golosinas en el que tienen los caramelos en bolsas de 1 Kg de cada sabor y los reparte en bolsitas más chicas para vender en kioscos. Ayuda a Martín a completar la planilla de cómo repartir 1 Kg de cada gusto en bolsas más pequeñas, con los datos que faltan.

¹⁹ Esta información es para el maestro, a los niños no se le informan estas relaciones, es decir no conocen la medida de los segmentos.

²⁰ Las actividades que se presentan para 5to año han sido elaboradas por el equipo de Patricia Sadovsky y fueron utilizadas con autorización de los autores. Las mismas están publicadas en este momento en “Sadovsky, P. (coordinación), (2005C)

Formas de armar las pequeñas bolsas

Gustos de caramelos en bolsas de 1 kg	Bolsas de $\frac{1}{2}$ kg	Bolsas de $\frac{1}{4}$ kg	Bolsas de $\frac{1}{8}$ kg
Frutilla	1	1	2
Menta	1		0
Limón	1	0	
Manzana	0		4
Naranja	0	3	

- Los niños que aparecen en esta tabla abrieron una caja de chocalatines, los partieron y comieron algunos. Se indica cuánto chocalatín comió cada uno. ¿Quiénes comieron la misma cantidad?

Nombre	Cantidad de chocalatín
Juan	$\frac{1}{2}$
Joaquín	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
Laura	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
Inés	$\frac{2}{4}$
Daniela	$\frac{3}{6}$
Camila	$\frac{6}{8}$
Martín	$\frac{4}{8}$
Victoria	$\frac{5}{10}$
Diego	$\frac{3}{4}$

¿Quién comió más? Anota cómo lo sabes.

- Estos niños se sirvieron jugo en sus vasos (algunos lo hicieron más de una vez) y lo tomaron. Ordenénlos desde el que tomó menos jugo al que tomó más jugo. Anoten cómo se dieron cuenta que ése es el orden.

Nombre	Vasos de jugo
Camila	$\frac{1}{3}$
Martín	$2\frac{1}{4}$
Victoria	$1\frac{3}{4}$
Diego	$1\frac{4}{5}$

En esta misma categoría se integra una actividad que exige ubicar fracciones en la recta numérica.

- Un corredor debe realizar la carrera de 100 metros. En la pista hay marcas, todas a la misma distancia unas de otras. Te damos una representación de la pista.



Contesta las preguntas y explica cómo pensaste en cada caso.

- a) Cuando el corredor está en el punto B ¿qué fracción del total del camino habrá recorrido? ¿Y cuántos metros recorrió?
- b) Cuando el corredor haya recorrido tres quintos del trayecto, ¿dónde estará?
- c) Cuando el corredor esté en el punto D, ¿qué fracción del total habrá recorrido?
- d) ¿Cuántos metros habrá recorrido cuando se encuentra en el punto A?
- e) Si el corredor se encuentra a 80 metros de la salida, ¿en qué punto se encuentra?

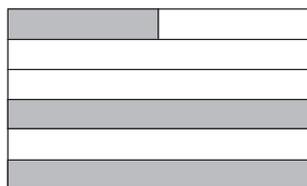
Se incluye también una actividad de *cálculo pensado*

- Para cada fila de la siguiente tabla, señala cuál es la respuesta correcta y explica cómo lo pensaste:

El doble de $\frac{2}{3}$ es:	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$		
La mitad de $\frac{2}{10}$ es:	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$		
El triple de $\frac{3}{15}$ es:	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{1}{5}$
La tercera parte de $\frac{3}{15}$ es:	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{1}{5}$

Otro tipo de actividades dentro de la categoría *relacionar* implica la escritura de fracciones a partir de la explicitación de la relación entre la parte y la unidad considerada. En ellas, al igual que en 4° año, se vuelve a poner en juego la idea central del concepto de fracción: $\frac{1}{n}$ es una cantidad tal que n veces $\frac{1}{n}$, es igual a uno.

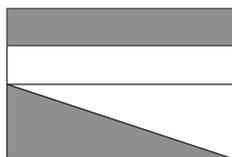
- ¿Qué parte del total del rectángulo se pintó?



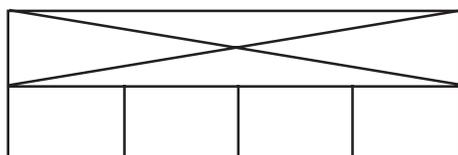
- ¿Es cierto que en el siguiente rectángulo se pintó la mitad? ¿Cómo lo explicarías?



- ¿Es verdad que el rectángulo y el triángulo pintado representan ambos $\frac{1}{4}$ del entero? ¿Cómo podrías hacer para estar seguro de tu respuesta?



- Sin hacer más divisiones, pinta, si es posible, $\frac{5}{8}$ del rectángulo.



- Para la categoría **medir** se presentan actividades en las cuales la medida está representada por una fracción y actividades de composición de la unidad a partir de una medida expresada como fracción.

- Se sabe que el siguiente pedacito de soga es $\frac{1}{5}$ de la soga entera. ¿Cuál es el largo de la soga completa?



- Se borró parte del segmento que estaba dibujado. Se sabe que la parte que quedó es $\frac{2}{3}$ del segmento completo. ¿Cómo era el segmento entero?



- (Se dibuja un segmento de 8cm.). Si el siguiente segmento representa la unidad, dibujar segmentos que sean:

- $1\frac{2}{4}$ de la unidad
- $\frac{3}{6}$ de la unidad
- $2\frac{1}{4}$ de la unidad

Las actividades de **sexto año** exigen, al igual que en 5to año, una fuerte argumentación de las respuestas.²¹

Aparecen ocho actividades de reparto, quince actividades de relacionar y una actividad de revisión.

- Las actividades del tramo **repartir** son las mismas que se plantean en 5to año pero se buscan otras relaciones y otras argumentaciones. Se pretende que los alumnos puedan apelar a formas de reparto cada vez más elaboradas, desprendiéndose de las representaciones gráficas o de procedimientos de reparto muy primarios.
- En el tramo **relacionar** se presentan actividades en las que es necesario reconocer fracciones en una representación gráfica, comparar fracciones y determinar el todo a partir de una fracción.

Las fracciones son de la forma $\frac{1}{n}$ o $\frac{m}{n}$ con el numerador mayor o menor que el denominador. Consideramos fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ a aquellas fracciones que representa una cantidad tal que n veces $\frac{1}{n}$ es la unidad. Las fracciones del tipo $\frac{m}{n}$ son aquellas que se pueden expresar como "m veces $\frac{1}{n}$ ".

²¹ Las actividades que se presentan para 4to, 5to y 6to año han sido elaboradas por el equipo de Patricia Sadovsky y fueron utilizadas con autorización de los autores. Las mismas están publicadas en este momento en Sadovsky, P.-coordinación- (2005C)

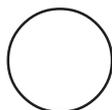
- En cada uno de los siguientes casos el dibujo representa una fracción de la unidad. Para cada caso, tu tarea consiste en dibujar la unidad.



Esta figura representa $\frac{2}{7}$ de la unidad



Esta figura representa $\frac{6}{5}$ de la unidad

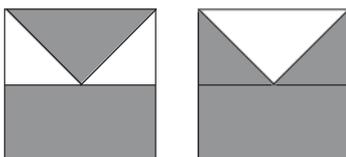


Esta figura representa $\frac{8}{2}$ de la unidad

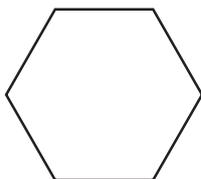
- Determinar qué parte del área del rectángulo representa la región sombreada.



- ¿En cuál de los cuadrados se pintó más superficie? Los cuadrados son iguales.



- Si el área de la figura es $\frac{3}{5}$ de una cierta unidad



dibuja una figura de área 1. ¿Hay un único dibujo posible?

Se plantean también, dentro de la categoría relacionar, algunas actividades de *orden*, *cálculo pensado* y *operaciones* (adición entre un número natural y una fracción y multiplicación y división de una fracción por un número natural).

- Decide, sin averiguar el resultado, si es posible que:

$3 - \frac{2}{3}$ dé un resultado menor que 2

$\frac{5}{2} - \frac{1}{4}$ sea menor que 2

$\frac{1}{4} + \frac{7}{5}$ sea menor que 1

$\frac{2}{5} + \frac{2}{10}$ sea mayor que 1

$\frac{2}{5} + \frac{2}{10}$ sea mayor que $\frac{1}{2}$

$\frac{17}{19} + \frac{21}{23}$ sea mayor que 2

Para cada caso, explica cómo lo pensaste.

- Analiza qué numeradores o denominadores podrían tener cada una de las siguientes fracciones para que sean menores que 1 y cuáles podrían tener para que sean mayores que 1. Anota ejemplos en los casilleros correspondientes:

Fracción a completar	Fracciones menores que 1	Fracciones mayores que 1
$\frac{5}{\dots}$		
$\frac{3}{\dots}$		
$\frac{\dots}{4}$		
$\frac{\dots}{7}$		
$\frac{11}{\dots}$		
$\frac{25}{\dots}$		
$\frac{34}{\dots}$		
$\frac{\dots}{98}$		

Finalmente se incluye una actividad de revisión que contempla aspectos trabajados en la escuela. La misma será presentada en la sección siguiente.

Propuesta para Inicial 5 años

Actividades de reparto

Con estas tres actividades se pretende trabajar la equivalencia en repartos exhaustivos y equitativos.

Consigna oral:

Tengo 5 barritas de cereal para repartir entre dos niños. ¿Cuánto le tengo que dar a cada uno? Yo no me quedo con nada. Hazlo en la hojita.

Condiciones de realización

Organización: en dupla

Forma de gestión

La actividad se realiza en grupos de dos alumnos permitiendo que cada dupla discuta y resuelva.

El docente recorre los grupos registrando las discusiones e ideas que los alumnos manifiestan para referirse a ellas en la puesta en común. Durante el recorrido se hace ver a los alumnos la necesidad de repartir el resto del reparto primario. En este caso el dividendo (impar) es mayor que el divisor (par) por lo que obtendrán resto uno que debe volver a repartirse entre dos niños. El cociente es mayor que la unidad por lo que el resultado podrá expresarse como fracción ("cinco mitades", "cinco pedazos" o expresiones similares) para cada uno o como número mixto ("dos barritas y media" o "dos barritas y un pedacito"). Es también importante que el docente lleve registro de estas expresiones ya que en lo escrito seguramente aparecerá sólo el dibujo y la respuesta será dada en forma oral. Por ello es necesario ver las formas en que realizan el reparto así como la forma en que pueden expresar lo que le toca a cada niño. No se pretende que escriban la notación convencional sino que puedan nombrar de alguna manera el resultado del reparto.

Es importante observar con los alumnos la necesidad de que no quede nada sin repartir (exhaustividad) y que todas las partes deben ser iguales (equitatividad).

En la puesta en común se hará especial hincapié en las diferentes formas de repartir y la equivalencia de los resultados observando que para poder "repartir todo" es necesario fraccionar (partir) algunas barritas.

Procedimientos posibles

- Expresar el resultado del reparto como resultado de un cálculo pensado:
 - con explicación oral que lo justifique
 - sin que pueda justificarse.
- Representar gráficamente el reparto:
 - dibujando las barritas y los niños,
 - dibujando sólo las barritas (obsérvese que el reparto es entre dos niños y se trabaja en duplas).
- Posibles repartos:
 - Dos barritas a cada niño y la restante dividirla a la mitad:
 - respondiendo "dos barritas y media a cada uno"
 - respondiendo "tres a cada uno" tomando como elementos semejantes la barrita entera y su mitad.
- Todas las barritas en mitades y dar cinco mitades a cada niño.
- Dar dos barritas a cada niño y luego dividir la barrita restante.
- Dividir las cinco barras en otras fracciones (cuartos por ejemplo).

Descripción de lo sucedido

La mayoría de las duplas representan los niños y las barritas y sólo dos duplas no logran resolver la situación.

Se encuentran los siguientes repartos:

- Dan dos barritas a cada uno y parten la restante, a la mitad. Varios responden que “le toca tres a cada uno” pero frente a la intervención docente que les hace reflexionar sobre la no equidad de las partes logran decir “dos barritas y un pedazo”.
- Dividen las cinco barritas a la mitad,
 - Dicen “estas mitades (cinco) para un niño y estas otras mitades (cinco) para el otro”.
 - Reparten en mitades las cinco barritas y afirman “le doy cinco pedacitos a cada uno”.
 - Parten las barritas en dos partes y dicen “toca cinco pedazos”.
 - Dividen las barritas en diez y dan dos pedazos a cada niño.
 - Dividen todas las barras a la mitad pero responden “dos y medio a cada uno”.
- Dan dos barritas a cada uno y la otra la dividen en cuatro partes de la que dan dos “pedazos”, $\frac{2}{4}$, a cada uno.

Es necesario recordar que esta es la séptima actividad de la secuencia por lo que los alumnos ya habían efectuado anteriormente repartos que obligaban a partir los elementos.

La mayoría realiza el reparto más “práctico” en tanto que comienzan repartiendo las unidades enteras y sólo cuando esto ya no es posible, parten la unidad.

En relación a la respuesta de estos alumnos, si bien la mayoría dice correctamente “a cada uno le tocan dos barritas y media” o “dos barritas y una mitad” aparecen otras expresiones similares como “dos barritas y un pedazo” que muestran que aún cuando el alumno no conoce el término mitad o medio para designar el resultado de la partición, puede establecer la no equidad de los elementos y separar las unidades enteras de las que están fraccionadas.

Sin embargo hay algunos alumnos que habiendo hecho el mismo reparto expresan “tres pedazos a cada uno” por lo que es necesario la intervención del docente para hacerlos reflexionar acerca de si los “tres pedazos” obtenidos son iguales e instarlos a buscar una forma de hacer notar esa diferencia cuando comunican su resultado. Ante esta intervención los alumnos deciden utilizar la expresión “dos enteras y un pedazo”

Algunos alumnos deciden partir a la mitad las cinco barritas $\left(\frac{5}{2}\right)$ expresando que dan “cinco mitades” a cada uno. Otros dicen que a cada uno le dan “cinco pedazos”.

Una alumna divide sus barritas en diez partes, indicando que a cada niño “le toca dos pedazos”. Ante la intervención de la docente que intenta que esta alumna compare su resultado con el de su compañera (ya que en un caso el resultado del reparto es $\frac{1}{5}$ y en el otro $\frac{2}{10}$), las alumnas manifiestan que en ambos casos los dos niños “comen lo mismo” pero no pueden producir argumentos que justifiquen su respuesta, ni establecer relaciones.

Otro alumno da dos enteros a cada uno y el restante lo reparte en cuartos de los que da dos partes a cada uno $(2 \text{ y } \frac{2}{4})$.

En la casi totalidad de repartos efectuados aparecen medios y cuartos como se había previsto. Como hemos visto, surgen procedimientos equivalentes que se discuten en la puesta en común.

En ella es interesante comparar los repartos efectuados, presentando las diferentes resoluciones gráficas. Se podrá potenciar la actividad si los alumnos pueden ver que:

- dar una mitad a cada uno, es lo mismo que dar dos cuartos
- los cuartos son más chicos que los medios por lo que para tener la misma cantidad se debe dar más cuartos a cada uno

- dar 5 mitades es lo mismo que dar $2y\frac{1}{2}$ ya que cada dos mitades pueden formar una unidad.

La comparación de estos repartos podría tener en cuenta “¿dónde están los cuartos de un reparto en la expresión un medio que aparece en otro reparto?” ¿dónde está cada barrita en las cinco mitades que se le dio a cada uno? y otras confrontaciones del mismo tipo que dependerán de los procedimientos que aparezcan en cada clase. Es importante que si no aparece más de un procedimiento el docente presente otro/s para poner a discusión “si comieron lo mismo” en ese caso que en el que los alumnos realizaron.

Del mismo modo será interesante ver quiénes “repartieron igual” que los que se presentan en el pizarrón a los efectos de ver que no es la forma de dibujar las barritas lo que importa sino haber realizado el mismo reparto. Así también es importante poder discutir que aunque se haya dado la misma cantidad de barritas en dos repartos diferentes, la forma de repartirlas fue distinta.

Lo realizado por los alumnos pone de manifiesto una riqueza de la actividad mayor de la que se había previsto por lo que pensamos que estos acercamientos son siempre una manera de potenciar los avances de los alumnos.

Actividad

Las actividades siguientes se proponen juntas. En esta presentación se hace un breve comentario de la primera y se analiza la segunda propuesta.

Consigna oral:

Si la mamá tiene 1 alfajor y le quiere dar a sus 4 hijos la misma cantidad y que no le sobre nada... ¿cuánto le toca a cada uno de los niños?

En esta actividad se presenta un reparto en el que se debe dar a cada uno la misma cantidad (equitatividad) sin que sobre nada (exhaustividad). El dividendo es uno y es, además, menor que el divisor (ya se habían enfrentado a una situación similar) pero en esta ocasión el reparto debe hacerse entre cuatro y no entre dos como en las actividades anteriores.

Condiciones de realización

Organización: en dupla.

Forma de gestión

Durante la resolución es necesario promover la representación de los repartos. Es probable que los niños dibujen los pedacitos de alfajor manteniendo la forma “redonda” para representar tanto las unidades como las partes. Será importante acordar finalmente una forma de representar la “mitad” y los “cuartos”.

Descripción de lo sucedido

Todos los alumnos representan los niños y el alfajor.

La mayoría de ellos reparte el alfajor en cuatro partes.

No se aprecia en esta oportunidad el problema entre número de cortes y número de partes.²²

Una dupla reparte en octavos.

²² En actividades anteriores los alumnos se habían enfrentado al siguiente problema: para dividir en 4 partes, dibujaban “cuatro divisiones (rayitas)” procedimiento que generaba 5 partes.

En todos los casos hablan de pedazos. Incluso al responder dicen que le toca uno a cada uno. Ante la pregunta de la maestra "¿un alfajor?", dicen:

- iiiiiNoooooo !!!!!

M - Y entonces ¿cuánto come cada uno?

N - Uno

Parecería que después de repartir, cada trozo se convierte en uno y se pierde el todo.

Actividad

Consigna oral:

Ahora tienes 3 alfajores y quieres darle a 4 nenes la misma cantidad y que no te sobre nada....¿Cuánto le toca a cada uno de los niños?

Esta actividad supone una mayor complejidad dado que puede aparecer el cociente expresado como la suma de dos fracciones diferentes ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$).²³

Condiciones de realización

Organización: en dupla

Forma de gestión

En la recorrida por el salón es importante que el docente haga notar la diferencia entre estos "pedazos de diferente tamaño" a los efectos de que los alumnos no expresen el resultado como "tres pedazos a cada uno".

En la puesta en común será necesario colectivizar las diferentes formas de reparto que aparecen en el grupo validando las pertinentes y promoviendo explicaciones por parte de los niños. Del mismo modo reviste especial interés poder comparar estos repartos observando que a pesar de que "todos comen lo mismo" el reparto no se hace de la misma manera, marcando las diferencias entre quienes lo hacen sólo en cuartos y quienes lo hacen en cuartos y medios. Será importante ver que como "los cuartos son más chicos que los medios" es necesario que aquellos que dividieron en cuartos necesiten dar mayor cantidad de éstos. Podrá observarse también que por cada medio es necesario tener dos cuartos "para que coman lo mismo".

Procedimientos posibles

- Dividir cada alfajor entre cuatro:
 - dando un cuarto de cada alfajor a cada niño
 - dando tres partes de cada alfajor a cada niño.
- Dividir dos alfajores en medios y el restante en cuartos.
- Dividir en octavos u otras fracciones.
- Dar un alfajor entero a tres de los niños y decir que "no alcanza para todos". En este caso se reparte la totalidad de alfajores (exhaustividad) pero no se atiende la equidad de las partes.
- Repartir atendiendo la equitatividad pero desestimando la exhaustividad: dar medio alfajor a cada uno y dejar un alfajor sobrante.
- Realizar correctamente el reparto en forma gráfica pero no poder expresar correctamente el resultado obtenido.

Descripción de lo sucedido

Todos los alumnos representan los alfajores pero a diferencia de la actividad anterior no todos necesitan realizar el dibujo de los niños.

²³ No se pretende trabajar con los alumnos la representación numérica. Será suficiente con que expresen: "una mitad y otro más chico"; "dos pedazos pero uno más chico que el otro" u otras expresiones del mismo tipo.

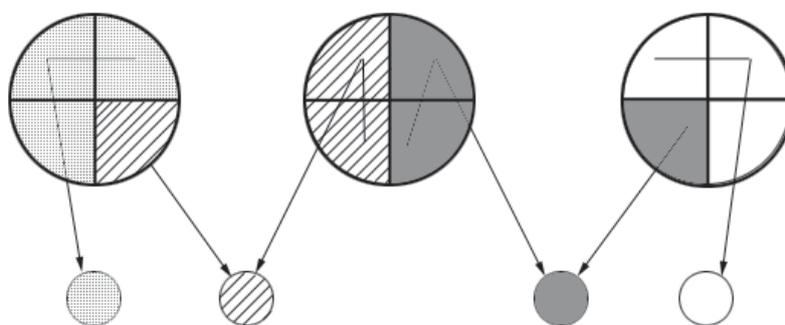
Los procedimientos que aparecen son: dividir todos los alfajores en cuatro partes o dos en mitades y el tercero en cuartos.

La mayoría de los alumnos reparten cada alfajor en cuatro partes iguales. En relación al reparto en cuartos aparecen dos formas de efectuarlo:

a - otorgando a cada uno $\frac{1}{4}$ de cada alfajor

b - ir dando $\frac{3}{4}$ del primero a un niño, $\frac{1}{4}$ del primero y $\frac{2}{4}$ del segundo a otro niño, $\frac{2}{4}$ del segundo y $\frac{1}{4}$ del tercero a otro y $\frac{3}{4}$ del tercer alfajor al último niño.

Una niña llega a pintar los tres pedazos y el niño al que le corresponden esos pedazos del mismo color. Probablemente esta alumna haya realizado un conteo a partir de otro dibujo de reparto hecho anteriormente a presentar éste.



Los alumnos no presentan mayores dificultades para realizar este reparto lo que hace pensar que experiencias anteriores en este tipo de actividades pueden haber contribuido a estos avances.

Es interesante mencionar que la docente da el nombre de "un cuarto" para "esos pedacitos" ya que a pesar de ser "cuartos" los alumnos los nombran como pedazos o mitades. De esta manera la docente zanja momentáneamente la dificultad que encontraban los alumnos para expresar el resultado: "dos mitades o dos pedazos" o "un pedazo y un pedacito".

En la puesta en común los alumnos si bien dicen que "comen lo mismo" en cualquiera de los dos casos, no pueden ver dónde están los $\frac{3}{4}$ en el reparto cuyo cociente es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Obviamente estas discusiones se basan en las representaciones gráficas de los repartos y no en la notación fraccionaria.

Es interesante poder comparar los repartos efectuados a los efectos de hacer notar que cada pedazo de $\frac{1}{2}$ se sustituye por dos de $\frac{1}{4}$ en el otro reparto.

Del mismo modo es importante hacer ver que estos repartos no son iguales aunque el cociente es del mismo valor, centrando ahora la atención sobre la forma de efectuar el reparto y no sobre las fracciones resultantes.

La posibilidad de comparación de distintos procedimientos, la discusión y argumentación dotan a la actividad de una fuerte potencialidad.

La reinversión de estos conocimientos en otros repartos en los cuales los números elegidos condicionan los procedimientos de resolución, podrán contribuir a la aproximación a las “fracciones” que se pretende en este nivel.

Actividad para relacionar

Se apunta a trabajar las relaciones entre la cantidad de partes y el “tamaño” de las mismas.

Consigna oral:

Primera parte:

Tienen que rellenar el cartón con poquitas piezas. La menor cantidad que puedan.

.....

Segunda parte:

Y ahora van a “rellenar” con muchas piezas. La mayor cantidad que puedan.

La actividad obliga a tener en cuenta la cantidad de piezas. Se pretende trabajar la relación “tamaño” y la cantidad de “partes”.

Condiciones de realización

Organización. se trabajará en modalidad de taller. Los grupos estarán integrados por seis niños que trabajarán en duplas. A cada dupla se le entregará un set con materiales.

Materiales

Set conteniendo:

Cartón base: rectángulo 16cm de ancho y 24cm de largo.

Piezas:

Rectángulos

4 de 16cm de largo y 12cm de ancho

4 de 24cm de largo y 8cm de ancho

5 de 12cm de largo y 8cm de ancho

5 de 24cm de largo y 4cm de ancho

5 de 16cm de largo y 6cm de ancho

10 de 8cm de largo y 6cm de ancho

3 triángulos rectángulos cuyos catetos midan 16cm y 24cm

Forma de gestión

Una vez armado el cartón se le pedirá a los niños que cuenten la cantidad de piezas utilizadas. En caso que haya equipos que no atiendan la consigna (menor cantidad de piezas) se les pedirá que intenten armarlo con menos piezas.

Una vez que todos hayan acordado que dos es la menor cantidad de piezas a utilizar, se podrá realizar alguna pregunta que conduzca a que los niños puedan nombrar las piezas como “medios”.

Luego se propondrá la segunda parte de la consigna.

En la recorrida por los grupos deberá hacerse hincapié en la conveniencia de que todas las piezas sean iguales para evitar que los alumnos combinen piezas que representen cuartos, medios y octavos. Si ello sucediera, el maestro promoverá la búsqueda de piezas más pequeñas. No se espera que los alumnos manejen los términos cuartos y octavos sino que se hará referencia a sus tamaños relativos pudiéndose referir a ellas como “grandes, medianas y chicas”. El maestro podrá ir manejando en algunos momentos las denominaciones un medio, que ya se había presentado, y un cuarto.

Una vez realizada esta segunda etapa, se podrá comparar los resultados de ambas partes de la actividad: “la menor cantidad de piezas posibles es dos y la mayor cantidad es ocho.” El comparar el tamaño de las piezas utilizadas en cada una de las instancias posibilita llegar a conclusiones del tipo “poquitas piezas porque son grandes, muchas piezas porque son chiquitas”.

Procedimientos posibles

Primera parte

- Cubrir la base con piezas de $\frac{1}{2}$
- Cubrir la base con $\frac{1}{2}$ y dos piezas de $\frac{1}{4}$
- Cubrir la base combinando medios, cuartos y octavos.
- Cubrir la base con un rectángulo que representa $\frac{1}{2}$ y querer completarla con un triángulo de $\frac{1}{2}$ por lo que la tarea no es posible

Segunda parte

- Cubrir la base con piezas iguales que representen $\frac{1}{8}$
- Cubrir la base con piezas iguales que representen $\frac{1}{4}$
- Cubrir la base combinando piezas de $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$

Descripción de lo sucedido

En la primera parte de la actividad no se presentan problemas. Los alumnos cubren la base directamente, bien con dos rectángulos o con dos triángulos, siendo esta segunda, la forma más generalizada. Los alumnos casi no “prueban” sino que colocan directamente las piezas adecuadas.

En la segunda parte, los alumnos, mayoritariamente combinan cuartos y octavos o en su defecto usan piezas de $\frac{1}{4}$. Es de hacer notar que en principio buscan piezas más pequeñas que para el cubrimiento anterior sin tener en cuenta “la mayor cantidad posible”. El docente debió intervenir para que los alumnos buscaran otras formas de cubrir el cartón en las que se utilizara mayor cantidad de piezas que para la primera parte. Varios alumnos que comienzan a trabajar con cuartos los cambian por octavos.

En la puesta en común pocos alumnos pueden verbalizar que en el segundo caso se precisan más y por eso hay que usar piezas más chicas.

En relación con la primera parte de la propuesta la docente compara las piezas de $\frac{1}{2}$ que se usaron: rectángulos y triángulos. Los alumnos insisten en que los triángulos son más grandes a pesar de que la maestra muestra y explicita varias veces que en ambos casos se necesitan dos para cubrir la base.

Parecería que se ha comenzado a construir la relación entre la cantidad de partes y su tamaño pero no la separación entre forma y superficie ni la equivalencia entre piezas de distinta forma que representan la misma parte.

La relación entre la cantidad y el tamaño de las partes, que es el objetivo de la actividad, es central para la comprensión de la equivalencia de fracciones y por lo tanto de medida, por lo que parece adecuado acercar a los alumnos a esta idea lo más tempranamente posible.

Actividad de medida

Se pretende que los alumnos identifiquen la fracción como expresión del resultado de una medición.

Consigna oral

Ustedes tienen dos tiras, una amarilla y una roja. Deberán darle la orden a los otros compañeros para que ellos construyan una tira igual a la más corta de ustedes. Tengan en cuenta que ellos tienen la tira roja igual a la de ustedes y una amarilla larguísima.

Esta es una actividad de comunicación. "Entendemos por juegos de comunicación a las actividades donde se propone a los alumnos transmitir a otros los datos necesarios que les permitan llevar a cabo una determinada actividad (en este caso reproducir una figura)²⁴. Los alumnos se convierten entonces en emisores de un mensaje cuya eficacia será puesta a prueba en las posibilidades del receptor de llevar a cabo la actividad con éxito. La selección de la información a transmitir exige un análisis donde se ponen en juego ideas vinculadas con el concepto que se está tratando"²⁵

Condiciones de realización

Organización en dupla.

Materiales: dos bandas de papel: una amarilla de cualquier longitud y otra roja cuya longitud sea la mitad de la amarilla.

Forma de gestión

La actividad se planteará en grupos de dos alumnos. Debe tenerse en cuenta que es una actividad de comunicación por lo que los alumnos no solo deben establecer la relación entre ambas bandas sino también deben expresar esa relación de tal manera que permita al otro grupo la construcción de una banda de la misma longitud.

En la actividad anterior se había trabajado con la misma situación pero la medida estaba dada por un número natural por lo que no era necesario fraccionar la unidad para efectuar la medición. En este caso se avanza sobre esa actividad ya que la longitud solicitada es un medio de la unidad. Los alumnos deben por lo tanto fraccionar la unidad y expresar esta cantidad de longitud a través de una fracción para poder dar la orden a sus compañeros: construir una banda cuya longitud sea un medio de la unidad.

Durante la puesta en común es importante que el maestro andamine a las diferentes duplas en el pasaje de la acción a la comunicación. En efecto, es esperable que todos los grupos puedan superponer ambas bandas y establecer que una es la mitad de la otra. Difícilmente los alumnos podrán sortear, sin la intervención del docente, la distancia entre la acción y la expresión de la relación requerida por la comunicación. Debe tenerse en cuenta que probablemente sea más fácil para los alumnos expresar que la roja cabe dos veces en la amarilla que decir que la roja es "la mitad de la amarilla."

La actividad incluye en sí misma la validación del resultado puesto que los alumnos podrán constatar directamente si la banda que construyen "coincide" con la de sus compañeros. No es el maestro quien decide sobre la validez o no del resultado.

Si bien las actividades de medición usualmente ponen de relieve la discusión sobre el error inherente a la medida y la determinación del intervalo, en esta actividad no se tomarán estos aspectos.

²⁴ En este caso nos referimos a una banda.

²⁵ Sadovsky, P. (2005c)

En la puesta en común se analizarán las diferentes comunicaciones expresadas por las duplas y se compararán las mismas. Parecería de importancia ver similitudes entre quienes expresan “la roja es la mitad de la amarilla” y los que digan “la amarilla es el doble de la roja”. Si surge esta posibilidad es interesante trabajar sobre ella viendo así la relación entre ambas longitudes en función de cuál sea tomada como unidad (si A es $\frac{1}{2}$ de B, entonces B es 2 A).

Procedimientos posibles:

- Plegar la banda amarilla a la mitad y expresar que la roja es la mitad de la amarilla.
- Realizar el mismo procedimiento y expresar que la amarilla es el doble de la roja.
- Realizar el primer procedimiento y expresar que si “se dobla o corta la amarilla a la mitad quedan iguales”.
- Realizar el procedimiento correctamente pero no poder expresar la relación.
- “Mostrar” a los compañeros lo que deben hacer como forma de comunicación.

Descripción de lo sucedido

Si bien todas las duplas pudieron efectuar la comparación entre ambas longitudes, no sucedió lo mismo con la posibilidad de comunicar dicha relación.

Pocas duplas pudieron hacerlo expresando:

- “hay que cortar por la mitad para igualar”
- “se dobla a la mitad y quedan del mismo tamaño”.

La actividad por lo tanto parecería haber quedado distante de las posibilidades de comunicación de los alumnos.

De manera que aunque hayan logrado establecer las relaciones, comunicar esa relación fue para la mayoría una dificultad importante. En efecto, la acción precede a la comunicación por lo que aún cuando los alumnos puedan manipular los objetos y comprender las relaciones en juego, explicitar esto mediante el lenguaje requiere distanciarse de la acción, lo que implica un mayor nivel de complejidad.

Dado que los alumnos se involucraron con interés en la actividad, la puesta en común permitió realizar un primer acercamiento a la expresión de la medida a partir de lo enunciado por las duplas que lograron el objetivo. El análisis permitió además trabajar sobre las relaciones en juego: medio y doble.

Del mismo modo, permitió la comparación con la actividad anterior (comunicación de medida de banda pero entera) de manera de poder establecer que “no siempre es posible medir sin fraccionar la unidad” y “que la unidad puede ser mayor que lo que se quiere medir”.

Propuesta para 1er. año

Actividades de reparto

Actividad

Estas 3 actividades llevan a la realización de repartos equitativos y exhaustivos.

Consigna oral

Yo quiero repartir estas 18 hojitas entre ustedes dos. A cada uno le tengo que dar la misma cantidad. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Condiciones de realización

Organización: en duplas

Materiales: 18 hojitas de papel para cada dupla.

Forma de gestión

El maestro propondrá la actividad brindando a cada dupla el material necesario. Tener las 18 hojitas permite que aquellos alumnos que lo necesiten puedan hacer un "reparto real". Es de esperar que el maestro recorra el salón tomando notas de lo que sucede en las duplas para poder intervenir adecuadamente y extraer insumos para la puesta en común.

Procedimientos posibles

- Proceder por ensayo y error ("tanteo") en forma desorganizada o teniendo en cuenta ciertos números como referentes.
- Realizar correspondencia (niños - hojitas) e ir contando simultáneamente los pares de hojas, llegando de esta manera a nueve.
- Repartir el material "uno a uno" sin contar la cantidad de hojitas correspondientes.
- Realizar correspondencia (niños - hojitas) y contar lo que le toca a cada uno al finalizar el reparto.

Descripción de lo sucedido

El maestro da la consigna del problema en forma oral, poniendo énfasis en los dos números intervinientes en la situación. Escribe el número 18 y el número 2 en el pizarrón.

Los alumnos, en general, abordaron la situación sin dificultad.

La mayoría de las duplas fueron contando de a uno o de a dos hasta llegar al número 18. Se pudo observar que algunos grupos desagregaron el número 18 para así repartir entre dos cada uno de los números obtenidos. Por ejemplo, los que desagregaron inicialmente en 10 y 8 volvieron a desagregar el 10 en 5 y 5 y posteriormente el 8 en 4 y 4 para responder luego "9 hojitas a cada uno".

Llamó la atención que ninguna dupla apeló al "reparto real" del material entregado.

Esencialmente se observan tres procedimientos empleados por los alumnos: por tanteo, desagregando el número para poder repartir fácilmente y haciendo correspondencias con posterior conteo.

La estrategia del conteo fue la menos utilizada; para aquellos alumnos habituados a desagregar los números, la actividad resultó muy accesible. Repartieron "el 18" apoyándose en números más fáciles como el 10 y el 8 apelando a sus repertorios de cálculo.

Por el contrario, el resto de los alumnos, realizaron la correspondencia uno a uno, repartiendo cada una de las unidades que componen el 18.

En la puesta en común se analizaron los repartos realizados por algunas de las duplas. La maestra destacó que en esta actividad no sobró ninguna hojita, ya que todas fueron repartidas

(exhaustividad del reparto) y que a cada niño le correspondió igual cantidad de hojitas (equitatividad del reparto).

Actividad

Consigna oral

Tengo 18 figuritas y quiero darle la misma cantidad a 3 nenes. Yo no me quedo con ninguna. ¿Cuántas le doy a cada uno?

Condiciones de realización

Organización: grupos de 3 niños cada uno.

Materiales: 18 hojitas pequeñas que representan figuritas.

Forma de gestión

Se organiza la clase en grupos de tres niños cada uno. Se espera que de esta forma se habilite el "reparto real" si los alumnos sienten la necesidad de hacerlo.

Procedimientos posibles

- Proceder por ensayo y error ("tanteo") en forma desorganizada.
- Proceder partiendo de sus repertorios memorizados de cálculo como $4+4+4$ o $5+5+5$.
- Realizar correspondencia (niños - hojitas) e ir contando simultáneamente las ternas de hojas, llegando de esta manera a 6.
- Repartir efectivamente el material "uno a uno" y no contar lo entregado a cada niño.
- Realizar correspondencia (niños - hojitas) y contar lo que le corresponde a cada niño.

Descripción de lo sucedido

La consigna fue dada en forma oral y se anotaron en el pizarrón los dos números intervinientes: 18 y 3.

Observamos en los equipos un momento de incertidumbre sobre cómo proceder. El divisor 3 los bloqueó inicialmente hasta que la mayoría optó por hacer un reparto "uno a uno" para luego recontar. Se apoyaron en este caso en lo que llamamos "reparto real" del material entregado.

Algunos grupos realizan tanteos, piensan en darle a cada niño 4 hojitas y luego lo descartan argumentando que no llegan así al 18; piensan darle 5 hojitas hasta llegar a 6 hojitas para cada niño.

En un equipo se observa que evocan un cálculo memorizado ($6+6+6 = 18$) y en otro que realizan un conteo "de tres en tres" y según palabras de sus integrantes, "hacemos dos vueltas de tres para cada niño".

A simple vista esta actividad parece no diferir en nada de la anterior, es un reparto de figuritas entre niños. Sin embargo el hecho de mantener fijo el dividendo dieciocho, que además es par, y variar el divisor de dos a tres produjo en los alumnos procedimientos diferentes.

Alumnos que en la primera actividad habían apelado al desagregado del número 18 y a sus repertorios de cálculo, no pudieron trasladar esta estrategia al caso de tener que repartir ahora dicho número entre tres.

En la puesta en común se destacó nuevamente que fue posible repartir la totalidad de las figuritas y que a cada niño le tocó la misma cantidad de ellas.

Actividad

Consigna oral

Con 22 nenes de la clase vamos a formar dos equipos iguales. ¿Cuántos nenes tendremos que poner en cada equipo?

Condiciones de realización

Organización: en duplas

Forma de gestión

El maestro presentará en forma oral la consigna del problema anotando en el pizarrón los dos números que intervienen: 22 y 2.

Se deberá recorrer el salón para intervenir según los procedimientos que desarrollen los equipos y para ir registrando lo ocurrido con el objetivo de potenciar la puesta en común final.

Procedimientos posibles

- Proceder por ensayo y error en forma desorganizada buscando posibles resultados numéricos.
- Proceder por ensayo y error y apelar a sumas conocidas de números iguales: 10 y 10, 11 y 11.
- Realizar el reparto “uno a uno” e ir contando.
- Apelar a desagregar 22 en 20 y 2 y usar repertorio de cálculos.
- Apelar a desagregar 22 en 10, 10 y 2 y apoyarse en cálculos conocidos.

Descripción de lo sucedido

Nuevamente la consigna fue dada en forma oral y se anotaron en el pizarrón los dos números intervinientes: 22 y 2.

Casi todas las duplas desagregaron el número 22 en 10+10 y repartieron luego el “2” restante.

Algunos intentaron representar los 22 nenes con dibujos, para separarlos luego en dos equipos con la misma cantidad de integrantes.

Muy pocos alumnos proceden por tanteo: 8+8, 9+9, 10+10 para así acercarse a 11+11. Vuelven a aparecer los desagregados del dividendo. Es de destacar que en este caso al igual que en la primera actividad, el divisor es el número “2”, lo cual parecería favorecer los procedimientos de reparto apoyados en el repertorio de “dobles” que tienen los alumnos. Parecería que “repartir” es asociado por los alumnos con “repartir en dos partes” lo cual podría ser una de las causas de la aparición de desagregados en dos, tanto en esta actividad como en la primera.

La maestra pone énfasis en los tres repartos realizados, refiriéndose a las tres actividades trabajadas, destacando, esencialmente, el hecho de que en estas situaciones el reparto es equitativo y exhaustivo.

Es interesante analizar que leyendo las 3 actividades se podría pensar en una misma actividad con distintos números. Sin embargo, la variación de los números actúa como variable didáctica ya que este cambio provoca procedimientos diferentes de resolución para un mismo alumno. Del mismo modo, puede verse como el divisor “2” parece “facilitador” ya que los alumnos pueden apelar a sus repertorios memorizados de cálculo. Es necesaria la variación del divisor para promover diferentes procedimientos que eviten que los alumnos asocien dividir con repartir entre 2. Con los alumnos no manejaremos estos términos, el análisis anterior es para los docentes.

Estas actividades, que también fueron propuestas en el Nivel Inicial, se complementan con otras en las cuales se debe analizar la posibilidad de realizar repartos exhaustivos de acuerdo al material empleado. Por ejemplo se propone repartir 11 figuritas entre 2 niños de tal manera que a los dos les debe tocar la misma cantidad para confrontar luego con una actividad en la cual los números involucrados sean los mismos pero que en lugar de figuritas se reparten chocolates.²⁶

Otras actividades en las cuales aparecen las fracciones como cociente están presentadas en la sección Secuencias de Enseñanza.

Actividades de relacionar

Actividad

Con estas dos actividades se apunta a trabajar la equivalencia de las “partes”.

Consigna oral

Completa el cartón con dos piezas. Yo voy a sacar una pieza de estas que pusiste y tú tienes que rellenar ese espacio utilizando dos piecitas. Para eso me las debes pedir.

.....

Y ahora vas a completar ese mismo espacio pero utilizando 4 piecitas que también me tendrás que pedir.

¿Me puedes explicar por qué se puede hacer de distintas formas?

Condiciones de realización

Organización: actividad individual.

Materiales²⁷

Rectángulo que se tomará como “base”: 24cm de largo y 16cm de ancho.

2 rectángulos 16cm de largo y 12cm de ancho

2 rectángulos de 24cm de largo y 8cm de ancho

5 rectángulos de 24cm de largo y 4cm de ancho

5 rectángulos de 16cm de largo y 6cm de ancho

5 rectángulos de 8cm de largo y 6cm de ancho

Forma de gestión

Se da la primera parte de la consigna presentando el rectángulo “base”. Una vez que terminen de “rellenarlo” con dos piezas, se solicita que lo hagan con cuatro piezas.

La actividad se realiza en forma de entrevista en la que el maestro trabaja con cada uno de los niños de la clase. Es importante registrar los procedimientos empleados por los alumnos y las argumentaciones dadas por ellos.

Procedimientos posibles

Primera parte

- Elegir simultáneamente las dos piezas “mitad” y colocarlas sobre el rectángulo base sin inconvenientes.
- Elegir simultáneamente las piezas “mitad” y ubicarlas con dificultad sobre el rectángulo base. Cuesta ubicar la pieza elegida en la posición que queda libre del rectángulo base.
- Elegir adecuadamente una de las “piezas mitad” y luego buscar otra igual a la primera.
- En un proceso de ensayo y error, primero elegir las piezas más chicas que la mitad del rectángulo base, probar sobre él y luego cambiarlas hasta llegar a la solución del problema.

²⁶ En este caso los chocolates podrán ser repartidos exhaustivamente mientras que las figuritas no.

²⁷ Se dan las medidas de los lados de cada rectángulo con el único fin de presentar el material; esta información no la recibieron los alumnos.

- Ensayar con varias piezas sin respetar la consigna de que sean sólo dos.
- Cuando el maestro retira una de las dos mitades, el alumno pide dos piezas de un cuarto para completar adecuadamente el espacio libre.
- Optar por pedir las piezas rectangulares de 16x12 para completar la mitad restante.
- Al tener que argumentar la elección de las piezas se espera que aparezcan expresiones como “son la mitad”, “son la mitad de la mitad”, “para llenar la mitad necesito dos piezas iguales”, “para llenar un lugar más chico necesito piezas más chicas”.

Segunda parte

- Elegir piezas más grandes que las necesarias para solucionar el problema y superponerlas.
- Intentar anticipar la solución pidiendo cuatro piezas con las cuales prueban y en caso de no servir vuelven a solicitar piezas apelando al tamaño de ellas.
- Solicitar cuatro piezas “chicas” iguales.
- Pedir piezas usando expresiones del tipo “mitad de la mitad”.
- Indicar correctamente las piezas que necesitan aún cuando les resulte dificultoso ubicarlas en la posición que corresponde.
- No lograr anticipar y probar con las piezas que van pidiendo.

Descripción de lo sucedido

La actividad se desarrolló en cuatro espacios en los que los alumnos fueron entrevistados. Para ello se contó con la colaboración de otra maestra de la escuela y de dos integrantes del equipo de trabajo.

La primera parte de la actividad en la que se solicitaba completar el rectángulo con dos piezas fue resuelta casi en forma instantánea. Los alumnos argumentaban que esas dos piezas eran las que servían apelando no sólo a la cantidad sino al hecho de que eran iguales. Casi todos utilizaron la expresión “son la mitad” o “son un medio”.

Al retirar una de estas mitades y solicitar otras dos piezas que cubrieran este espacio se pudo apreciar que la solución no fue tan rápida como en la parte anterior, pero igual los alumnos supieron solicitar las piezas que necesitaban en esa nueva instancia. Argumentaron diciendo que ahora las piezas debían ser “más chicas” o que ahora las piezas debían ser “la mitad del lugar” que debían rellenar. En general se pudo observar que la anticipación de cuáles eran las piezas necesarias casi no ocurrió, los alumnos tuvieron que ir comprobando si las piezas solicitadas solucionaban o no el problema.

Al tener que completar la mitad del rectángulo “base” con cuatro piecitas volvieron a aparecer argumentaciones que apuntaban al tamaño de ellas, en esta nueva instancia debían ser más chicas. Muy pocos alumnos utilizaron expresiones del tipo “un cuarto” y ninguno expresó el término “octavo”.

Los alumnos pudieron cumplir con lo solicitado en la actividad. No pudieron dar una razón de por qué el cartón base podía ser cubierto de maneras diferentes. Sólo plantearon argumentos del tipo “para cubrir la mitad con otras dos piezas, necesitamos que éstas sean más chicas”.

Actividad

Consigna oral

Yo pongo esta pieza , y tú me pides otras para completar el cartón.

.....

Ahora yo pongo esta pieza ($\frac{1}{4}$), tú tienes que poner las demás.

Condiciones de realización

La pieza que el maestro coloca es $\frac{1}{2}$ pero de diferente forma que en la anterior.

Organización: actividad individual.

Materiales

Rectángulo que se tomará como "base": 24cm de largo y 16cm de ancho

2 rectángulos de 16cm de largo y 12cm de ancho

2 rectángulos de 24cm de largo y 8cm de ancho

5 rectángulos de 24cm de largo y 4cm de ancho

5 rectángulos de 16cm de largo y 6cm de ancho

5 rectángulos de 8cm de largo y 6cm de ancho

Forma de gestión

La propuesta se realizó el mismo día, a continuación de la actividad que hemos analizado antes y fue gestionada de igual manera que aquella. El maestro, al empezar, colocó sobre el cartón base un rectángulo diferente al utilizado en la actividad anterior.

Esta actividad también exigió poner en juego la anticipación, por parte de los alumnos, estableciendo algunas relaciones con el trabajo realizado en la actividad anterior: ellos debieron decidir la cantidad y el tamaño de las piezas necesarias para completar la base. Al proponer la segunda parte, apareció la pieza de $\frac{1}{4}$ colocada en el cartón "base" lo cual implicó que, según el material del que se dispone, los alumnos pudieron recurrir a diferentes piezas: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

Procedimientos posibles

- No anticipar y solicitar piezas "al azar" para luego verificar sobre el cartón "base" si sirven o no.
- Visualizar solamente que necesitan piezas más chicas que la que colocó el maestro.
- Anticipar el tamaño de la pieza a pedir, debe ser más chica y argumentar que necesitarán más de una.
- Destacar la necesidad de piezas más chicas, pedir al azar algunas con esta propiedad y verificar si sirven o no. En caso de no servir intentar "solapar"²⁸ las piezas.
- No poder nombrar las piezas en forma numérica y señalar la que necesitan o sólo indicar su tamaño: "la más corta" o "la chiquita".
- Pedir una pieza y luego por "conteo" decidir cuántas más necesitan.
- Nombrar las piezas a pedir en forma numérica: "dame la de un cuarto".

Descripción de lo sucedido

Primera parte

En general los alumnos tuvieron ciertas dificultades para nombrar las piezas. Se dirigían al docente solicitándolas por su tamaño: "la más grande", etc.

Se pudo constatar que la mayoría de ellos no pudo anticipar, tal cual lo esperado, la cantidad y el número de las piezas a utilizar. En este sentido la estrategia que más se observó fue la de pedir una pieza, apelando a su tamaño, y luego ir solicitando las restantes de a una.

Sólo un alumno solicitó la pieza correspondiente a $\frac{1}{8}$ del cartón "base", sin nombrarla numéricamente, la señaló.

²⁸ Entendemos por "solapar" cuando superponen parte de piezas una sobre otras, utilizando así más piezas de las necesarias para el cubrimiento.

Segunda parte

Esta parte de la actividad resultó un poco más engorrosa. De cualquier manera es de destacar que todos pudieron abordarla y presentar alguna solución. Se pudo constatar, al igual que lo sucedido en la primera parte, que casi la totalidad de los alumnos tuvieron la necesidad de ir probando sobre el cartón "base" evidenciando la imposibilidad de anticipar el número de piezas a solicitar.

En la puesta en común de las dos actividades, se puso énfasis en que

- un todo puede ser cubierto de diferentes maneras,
- la relación existente entre el tamaño y la cantidad de piezas solicitadas,
- el nombre de algunas fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y
- para componer la unidad (cartón "base") se precisan 2 de $\frac{1}{2}$, 4 de $\frac{1}{4}$, 8 de $\frac{1}{8}$.

Estas dos actividades tienen como objetivo componer la unidad apelando a la equivalencia de las partes por lo que es conveniente centrar la atención del análisis posterior en ese sentido.

Podría aseverarse que la unidad, materializada en el cartón "base" a rellenar, fue completada por cada uno de los alumnos que participaron. No pudieron en general anticipar la o las figuras que necesitaban; para ello fueron probando sobre el cartón "base" hasta completarlo. ¿Apelaron a la equivalencia entre las partes? Cuando los docentes que gestionaron la actividad, fueron preguntando a los alumnos por qué pedían tal o cual pieza y cómo estaban seguros que ellas les servían aparecieron respuestas que denotaban la equivalencia que los alumnos observaban entre algunas piezas. Esta equivalencia se explicitaba, por ejemplo, en respuestas del tipo "si superpones estas dos te da esa otra que tenés ahí" cuando hacían referencia a que dos piezas de un cuarto equivalían a una de un medio.

Pudo constatar que los alumnos no supieron o no sintieron la necesidad de nombrar las piezas apelando a expresiones numéricas, lo cual no fue impedimento para el cumplimiento del objetivo.

Propuesta para 2º año

Actividades de reparto

Con estas tres actividades se pretende vincular el resultado de un reparto con la cantidad a repartir y el número de partes, es decir, poner en juego las relaciones entre dividendo, divisor y cociente.

En la primera de ellas se duplica el dividendo y el divisor ($2D:2d$).

En la segunda se mantiene el mismo dividendo y se duplica el divisor ($D:2d$).

En la última se duplica solamente el dividendo ($2D:d$).

Consigna oral

(Se hace en el pizarrón el dibujo que hizo Valeria: un chocolate repartido entre dos nenes).

Observen el dibujo de Valeria. Luego ustedes deberán hacer el de Mariana.

En el dibujo de Mariana sabemos que hay el doble de nenes y el doble de chocolates que en el de Valeria.

¿En cuál de los dos repartos creen ustedes que le toca más chocolate a cada niño? ¿En el de Valeria o en el de Mariana?

Con esta situación se pretende la representación de un reparto a partir de otro dado y la comparación de los resultados obtenidos en ambos.

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Forma de gestión

Es necesario dar tiempo suficiente para la discusión de las duplas con el objetivo de que éstas encuentren argumentos para validar sus repuestas.

El docente al circular por el salón y observar los intercambios que se dan en las duplas podrá registrar las representaciones realizadas y los argumentos manejados. Si alguna dupla no estableciera la relación entre las cantidades del reparto realizado por Mariana y por Valeria será necesario intervenir para que observen las relaciones entre las cantidades de chocolates y las cantidades de niños que intervienen en cada reparto.

Sería conveniente en la puesta en común, preguntar a los alumnos qué sucedería con el reparto si se siguieran duplicando el número de chocolates y el número de niños a partir del dibujo de Mariana.

Lo sustancial de la intervención anterior es que los alumnos descubran que las relaciones se mantienen, es decir que si se duplica el número de chocolates y el de niños siempre le toca la misma cantidad a cada uno. Estamos trabajando con la propiedad de invarianza de la división²⁹.

Procedimientos posibles

- Realizar solamente el dibujo del reparto sin extraer ninguna conclusión.
- Realizar el dibujo y acompañarlo con el planteo de la división $1 \underline{)2}$ y $2 \underline{)4}$ sin obtener el cociente.
- Realizar el dibujo y escribir de algún modo lo que le toca a cada uno pero sin lograr extraer conclusiones al no vincular los dos repartos.
- Duplicar solamente el número de chocolates y no el de niños.
- Duplicar ambas cantidades, logrando expresar: "le toca más en el de Mariana" porque hay más trozos, sin observar el número de niños.

²⁹No se hablará de propiedad ni se dará su nombre a los alumnos.

- Comparar ambos repartos concluyendo que le toca lo mismo a cada uno sin argumentar.
- Comparar ambos repartos concluyendo que le toca lo mismo a cada uno estableciendo la relación entre el número de partes y el tamaño de las mismas.
- Relacionar las ideas de doble y mitad al hacer el reparto, concluyendo que le toca lo mismo a cada niño.

Descripción de lo sucedido

Los alumnos entendieron rápidamente lo planteado en la actividad. Comenzaron a discutir a la interna de cada dupla y se escucharon discusiones sobre la forma de representación del reparto. Algunos equipos la acompañan con la escritura: $1 \overline{)2}$ y $2 \overline{)4}$ sin efectuarlas. Es probable que estos planteos aparezcan como argumento al identificar los repartos con la división, aunque la situación no las exige.

En algunas producciones la representación aparece acompañada con la expresión: “una mitad”, “un medio” y en algunos casos llegan a concluir “entonces comen lo mismo”.

A partir de la intervención de la maestra “¿qué sucedería si tenemos un chocolate y cuatro niños y ustedes tuvieran para repartir el doble de chocolates y de nenes?”, vuelven aparecer las mismas representaciones pero ahora acompañadas de: “si tengo el doble de chocolates y el doble de nenes entonces comen lo mismo”, “les sigue tocando lo mismo a cada uno”.

Se observó que la mayoría de los niños logró una representación adecuada del reparto que exigía esta actividad y pudieron expresar que “comen lo mismo”.

Algunas duplas avanzaron y lo expresaron como una cantidad: “comen siempre una mitad”, “les toca la mitad a cada uno”, “un medio”.

La pregunta realizada por la docente “¿y si duplicáramos el número de niños y de chocolates del reparto de Mariana?” habilita a reflexionar sobre la situación. La docente en una primera instancia apela nuevamente a la duplicación del dividendo y del divisor para posibilitar una “generalización” que implique el descubrimiento por parte de los alumnos de que “si se duplica el número de chocolates (representado por el dividendo) y el número de niños (representado por el divisor), la cantidad que le toca a cada uno en el reparto (representado por el cociente) es siempre la misma”.

A continuación se propone una actividad en la que se varía la cantidad de chocolate pero se mantiene la misma cantidad de niños beneficiarios del reparto.

Actividad

Consigna oral

(Se dibuja en el pizarrón el reparto de Manuel: un chocolate para dos niños)

Observen el dibujo de Manuel. Luego ustedes deben hacer el de Pablo.

En el dibujo de Pablo hay el doble de nenes que en el de Manuel y la misma cantidad de chocolate.

¿En cuál de los dos repartos creen ustedes que le toca más chocolate a cada niño?

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Comentarios

Esta propuesta exige, al igual que la anterior, una comparación entre los resultados de dos repartos, pero en esta actividad las cantidades resultantes del reparto no son iguales. Es

necesario poner en juego la comparación de fracciones. En esta instancia se varía el divisor (cuatro nenes), manteniendo el mismo dividendo (un chocolate). El resultado de los dos repartos, lo que corresponde a cada nene, es menor que uno. Con esta actividad aparece por primera vez la fracción $\frac{1}{4}$ en el resultado.

La instancia colectiva será la que posibilite la discusión sobre la relación de esta actividad con la realizada anteriormente en la cual varían “los dos números dados de igual manera” mientras que en esta se modifica uno solo.

La discusión deberá centrarse en “que si debo repartir algo en mayor cantidad de partes, cada parte será más pequeña”.

Se puede plantear “¿y si reparto lo mismo pero entre menos nenes?”

Sería importante poder arribar a conclusiones de este tipo:

- Si duplicamos la cantidad de chocolate y de niños, a cada uno le corresponde la misma cantidad de chocolate.
- Si un chocolate se reparte entre mayor cantidad de niños, la parte que le corresponde a cada uno es más pequeña.

Procedimientos posibles

- Realizar los repartos con dibujos y no explicar en cuál de ellos le corresponde más chocolate a cada niño.
- Realizar los diagramas del reparto explicitando que en el de Manuel le toca “más cantidad”, argumentando que en el reparto de Pablo, las partes son más pequeñas. (Aparece la relación número de partes – tamaño de la parte)
- Realizar un dibujo representando la situación y argumentar que en el reparto realizado por Pablo (1:4) les toca más porque son cuatro partes. (Priorizan la cantidad de partes frente al tamaño de cada una)
- Realizar el dibujo de cada reparto y expresar numéricamente el resultado de cada reparto, pudiendo escribir “un medio es más que un cuarto”.
- Argumentar que para tener $\frac{1}{2}$ se precisan dos de $\frac{1}{4}$ por lo tanto le toca más a cada niño en el reparto de Manuel.

Descripción de lo sucedido

Para resolver la actividad se apoyaron principalmente en dibujos, dejando de lado el planteo del algoritmo convencional de la división que había aparecido en la actividad anterior. La mayoría de los alumnos resuelve la situación, diciendo que en el reparto de Manuel comen más porque:

- “Un medio es más grande y un cuarto es más chico”
- “Manuel reparte más porque solo le da a dos niños”
- “Un cuarto es menor que un medio”
- “En un medio hay dos cuartos”

Otras duplas contestan que los niños del reparto de Pablo son los que reciben más. Se han centrado en el número de partes independientemente del tamaño de cada una de ellas. Todavía manejan una sola variable a la hora de comparar, atienden al número de partes o a su tamaño.

En el momento de la puesta en común y de la confrontación se manejan los argumentos anteriormente expresados y se posibilita la comparación de las cantidades apoyados en representaciones realizadas por los niños en el pizarrón.

Se concluye que los niños que comen más son los del reparto de Manuel porque “divide un chocolate solamente en dos y Pablo lo divide en cuatro”. Los acuerdos que aparecen son:

- En el de Valeria y Mariana comen lo mismo y en el de Manuel y Pablo no tienen lo mismo.
- Porque aumentó el número de niños y el de chocolate sigue igual.
- Si dividimos un chocolate en cuatro, cinco o seis partes, las partes se hacen más chicas.
- La mitad tiene más que los cuartos porque es un pedazo más grande.
- Un mismo chocolate si lo partimos cada vez en más partes, éstas se achican.

Se observa que comienzan a relacionar el número de partes con el tamaño de la parte, no centrándose solamente en la cantidad de partes. Aparece también la relación entre medios y cuartos. La representación gráfica de la partición del chocolate y su análisis permitió observar que para obtener $\frac{1}{2}$ se precisan dos de $\frac{1}{4}$. Es decir que $\frac{1}{2}$ se puede formar a partir de dos cuartos. Implícitamente comienza entonces a funcionar la relación de equivalencia entre esas fracciones.

En la siguiente actividad se propone duplicar la cantidad de chocolate manteniendo la cantidad de niños beneficiarios del reparto. El objetivo será vincular las modificaciones realizadas con la cantidad resultante del reparto, completando así las diferentes posibilidades de modificación del dividendo, el divisor y el cociente y las relaciones entre ellos.

Actividad

Consigna oral

- En el dibujo de Mariana hay 5 chocolates y dos nenes.
- En el de Pablo hay 10 chocolates y dos nenes.
- ¿En cuál de los repartos creen que le toca más chocolate a cada nene?

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Forma de gestión

Se continúa trabajando con la misma “cantidad de nenes” pero variando la cantidad a repartir. En este caso el resultado del reparto es un número mayor que la unidad. Será importante establecer la relación de esta actividad con las anteriores.

Esta instancia deberá centrarse en las variaciones que tiene el cociente en función de la variación del dividendo. Aún cuando no se explicita la relación en estos términos, lo que importa concluir es que “hay más para repartir entre la misma cantidad de nenes, entonces a cada nene le toca más”.

A partir de la puesta en común será necesario sintetizar las relaciones observadas en esta serie de actividades, registrando algunas conclusiones.

Procedimientos posibles

- Apoyarse en un dibujo para dar la respuesta.
- Dibujar y escribir numéricamente los resultados de los repartos expresando que le toca más en el de Pablo.
- Efectuar las divisiones 10:2 y 5:2. Para esta última representar gráficamente el reparto del resto.

- Concluir que les toca más en el reparto de Pablo porque “hay más para repartir entre la misma cantidad de niños”.

Descripción de lo sucedido

Las respuestas, en general, las dan a través de diagramas acompañados de expresiones numéricas del tipo:

- $\frac{1}{2} + 2$
- $2\frac{1}{2}$
- 2 chocolates y un medio
- 2
 $\frac{1}{2}$ } Como expresión del reparto 5 entre 2.

El reparto de Mariana es el que implica, en esta actividad, el trabajo con fracciones. No apareció como dificultad la expresión del número “dos y medio”. Algunos usaron un número mixto para dar la respuesta.

Una dupla respondió que en el reparto de Mariana se obtuvieron tres chocolates, considerando como un entero. La maestra, en este caso, trabajó con hojas de papel representando con ellas $\frac{1}{2}$ y observando que una hoja entera y un medio no representan la misma cantidad, es decir que $2 + \frac{1}{2}$ no es igual a $2 + 1$.

Transcribimos a continuación un diálogo entre la maestra y un alumno que deja en evidencia algunas de las relaciones puestas en juego:

M - ¿Entonces, qué podemos decir?

A - Si hay el doble de chocolates entonces comen el doble. Es decir cinco es el doble de dos y medio.

M - Entre todos observamos la relación entre las cantidades y vemos que al duplicar lo que tenemos para repartir se duplica el tamaño de la porción.

A - Y que si solamente se duplica entre los que vamos a repartir, las porciones se hacen más pequeñas, quedan la mitad.

Algunos alumnos pudieron expresar la relación doble – mitad entre 5 y $2\frac{1}{2}$ (cociente de ambos repartos).

En la puesta en común se tuvieron en cuenta las vinculaciones con las actividades anteriores, evocándose las conclusiones que se habían alcanzado:

- “Cuando hay el doble de chocolates y el doble de niños le toca lo mismo”.
- “Si reparto la misma cantidad de chocolates y el número de niños es diferente los niños reciben distinta cantidad”.
- “Cuando el chocolate es el doble y los niños son la misma cantidad, reciben más”.

Aún cuando “no se ha enseñado” número mixto, los alumnos manejan correctamente esta notación ante el requerimiento de la situación.

Sintetizando: en la primera actividad los niños apelaron al modelo de la división quizás con el objetivo de modelizar la situación. Esta operación es sustituida en las siguientes actividades

por la representación gráfica y la expresión numérica del cociente, poniendo en juego la comparación directa de los cocientes obtenidos como “lo que le toca a cada uno en cada reparto”.

La confrontación de los diferentes procedimientos buscando similitudes, correspondencias, diferencias puede potenciar avances en las argumentaciones de los alumnos.

El trabajo con las tres actividades secuenciadas posibilita establecer las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.

Continuar con actividades de este tipo “abre el camino” al descubrimiento de las relaciones entre numerador y denominador en grados posteriores.

Actividad para relacionar

Se pretende que los alumnos establezcan relaciones numéricas entre las partes y la unidad.

1^o parte

Necesitamos poner 1 litro de agua en un recipiente.

Sólo tenemos botellas de $\frac{1}{2}$ litro para hacerlo.

¿Cómo lo pueden hacer?

.....

2^a parte

Y si tuviésemos $\frac{1}{4}$ para completar 1 litro y $\frac{1}{2}$

.....

3^a parte

Y para poner 1 litro con botellas de $\frac{1}{4}$ ¿cómo harías?

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Formas de gestión

Se espera que los alumnos expresen que necesitan dos de $\frac{1}{2}$ para formar 1 litro. En esta actividad hay un avance significativo, puesto que no tienen material para manipular y verificar posteriormente como venían trabajando en actividades anteriores de este mismo tramo. Creemos que utilizar botellas de medio litro no es una dificultad pues algunos alumnos conocen etiquetas donde se encuentra representada dicha cantidad. Aquí se exige la composición numérica de la unidad a partir de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

Es importante ver la relación $\frac{1}{2}$ litro, un litro y llegar a afirmaciones como: “uno es igual a dos de medio o $1 = \frac{2}{2}$ ”

La segunda parte de la consigna se dará en forma oral.

Se observará que para obtener “un litro y medio necesito tres botellas de $\frac{1}{2}$ ” o sea que “ $1 \text{ y } \frac{1}{2} = 3 \text{ de } \frac{1}{2}$ ” o “ $1 \text{ y } \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ”.

La tercera parte de la consigna también se dará en forma oral.

Aparecen las botellas de $\frac{1}{4}$. Partimos de la base que en actividades anteriores ya ha surgido la relación entre cuartos y medios. Esta es una nueva instancia para poder trabajarla.

A partir de las relaciones que surjan se institucionalizará que necesito "4 botellas de $\frac{1}{4}$ para formar 1 litro" o que "1=4 de $\frac{1}{4}$ " o " $1 = \frac{4}{4}$ ".

Procedimientos posibles

- Representar gráficamente para luego responder utilizando números.
- Realizar cálculos recurriendo a repertorios conocidos como por ejemplo que "dos de $\frac{1}{2}$ forman uno".
- Utilizar simultáneamente los dos procedimientos anteriores, buscando argumentar la respuesta basándose en las representaciones gráficas.

Descripción de lo sucedido

Entre los procedimientos aparecidos podemos destacar:

- Solo presentan una operación:
 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ (Presentando la operación en forma vertical)
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- Acompañan la operación $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ con los siguientes comentarios:
 - "Si vos tenés un litro tenés que tener 2 botellas de medio litro".
 - "Si usamos 2 botellas de $\frac{1}{2}$ te da..." (Respuesta correspondiente a la primera parte)
- Utilizan representaciones gráficas y dibujan las botellas de $\frac{1}{2}$ litro y expresan que necesitan dos para completar un litro.
 - Proceden de forma similar en la parte dos y tres de la consigna.

En la puesta en común se trabaja en el pizarrón con algunos procedimientos que surgen de los equipos.

En el pizarrón se registra:

1era parte

Para formar 1 litro con botellas de $\frac{1}{2}$ preciso 2 de $\frac{1}{2}$. Se escribe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

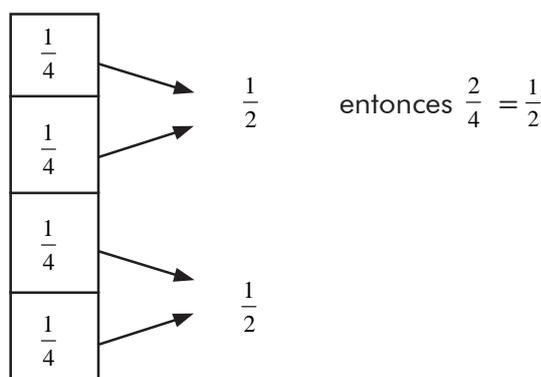
2da parte

Para formar 1 litro y $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{2}$ preciso $\frac{3}{2}$ porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$

3era parte

Para formar 1 litro con botellas de $\frac{1}{4}$

1 litro = $\frac{4}{4}$ litros



Aparece como institucionalización la siguiente conclusión:

“Se puede escribir 1 litro como: $\frac{2}{2}=1=\frac{4}{4}$ ”

Las producciones de los alumnos reflejan discusión y trabajo. Utilizan sin problemas las fracciones para formar un litro y un litro y medio.

No aparecieron problemas con la representación de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. Surgen diferentes formas de resolver el problema apelando al cálculo, a argumentaciones con y sin apoyo de dibujos.

Los alumnos manejaron sin dificultad que 2 veces $\frac{1}{2}$ componen la unidad y que necesito 3 botellas de $\frac{1}{2}$ para formar $1\frac{1}{2}$, así como también necesito 4 botellas de $\frac{1}{4}$ para formar 1 litro. Los alumnos pudieron desprenderse del contexto (botellas) y trabajaron numéricamente componiendo las cantidades, utilizando solamente los números en el momento de la argumentación escrita. La actividad apela a buscar la relación entre la parte y el todo que se pretendía formar. En todos los casos la búsqueda de esa relación es necesaria para que la situación se pueda resolver. Aparece la utilización de la composición numérica de diferentes “todos” (un litro, $1\frac{1}{2}$ litro) a partir de las partes dadas ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$), acompañada de argumentaciones dadas por los alumnos que validan sus producciones.

Propuesta para 3er. año

Actividad de reparto

Se apunta a identificar la posibilidad de realizar repartos exhaustivos en función de las magnitudes en juego.

Consigna escrita

*Juan quiere repartir, en partes iguales, 39 bolitas entre 6 niños.
María va a repartir, en partes iguales, 39 hojas entre 6 niños para hacer un collage.
¿Quién podrá repartir todo lo que tiene?
¿Cuánto le darán a cada uno en cada caso?*

69

Condiciones de realización

Organización: en dupla.

Forma de gestión

La actividad se planteará en grupos de 2 alumnos permitiendo que cada dupla discuta y resuelva.

La docente recorrerá los grupos durante la resolución haciendo preguntas y sugerencias que ayuden a los alumnos a discutir la diferencia entre las características de las cantidades puestas en juego. Los alumnos deberán reparar en que en un caso el cociente debe ser un número Natural ya que no es posible la exhaustividad del reparto (bolitas) mientras que en el otro es posible volver a dividir el resto (las hojas se usarán para collage), obteniendo de esta forma una fracción.

En la puesta en común se hará ver que aún cuando las dos divisiones tienen igual dividendo y divisor ($39:6$) el cociente no es el mismo ya que en un caso el cociente es un número Natural (6) mientras que en el otro es una fracción que también puede expresarse como número mixto ($\frac{13}{2}$; 6 y $\frac{1}{2}$)³⁰. Esto es consecuencia de que en el primer caso estamos frente a una magnitud discreta, mientras que en el segundo se trabaja con una magnitud que, aún cuando es discreta, funciona, en esta oportunidad, como continua. Esto se debe a que las hojas se usarán para un collage por lo que es posible cortarlas. No sería lo mismo si éstas fuesen destinadas a otro uso.

La puesta en común se centrará en la distinción anteriormente planteada. Es importante ver la equitatividad y exhaustividad del reparto en función de la situación que es la que determina esta posibilidad. En el segundo caso se trabajará también sobre la fracción resultante de dividir el resto.

Procedimientos posibles

- En ambos casos repartir gráficamente las cantidades.
- En ambos casos plantear una división para efectuar el reparto:
 - Repartir ambas cantidades obteniendo un cociente natural, sin reparar que en el segundo caso, es posible continuar repartiendo el resto.
 - Realizar la división y obtener como cociente un número decimal ignorando el tipo de magnitud en juego, lo que para el primer caso no es posible ya que no se puede partir bolitas, y en el segundo una expresión como $6,5$ ("seis coma cinco") hojas no es la más adecuada en este contexto ya que lo esperable sería $6\frac{1}{2}$ (6 hojas y media).
 - Obtener como cociente de la división $6,5$ y expresarlo como seis hojas y media teniendo en cuenta la naturaleza de los objetos a repartir y el contexto.
 - Obtener un cociente natural en la división y aislar el resto resultante (3) para dividirlo en forma gráfica
 - Obtener un cociente natural en la división y aislar el resto resultante para efectuar un nuevo reparto obteniendo una fracción.

Descripción de lo sucedido

Para resolver la actividad la mayoría de los alumnos recurre a la división $39:6$, planteando el algoritmo convencional para efectuarla. Cabe preguntarnos por qué los alumnos recurren al algoritmo cuando en realidad $39:6$ podría ser un cálculo mental, resuelto a partir del repertorio de cálculos memorizado. ¿Qué son las "tablas de multiplicar" sino un repertorio memorizado de factores al que debería apelarse en estos casos como procedimiento de resolución? ¿Tiene sentido "hacer una cuenta escrita" para $39:6$ cuando estos niños ya saben la tabla del 6? ¿O acaso no han podido aún establecer la relación multiplicación – división? Solo una dupla procede a resolver en forma gráfica.

Sólo dos alumnos argumentan que hacen una sola división "porque es la misma". Este dato nos llama a la reflexión. Para los alumnos ¿es condición necesaria para resolver una situación hacer "la cuenta"? ¿No pueden reparar en que los números y la operación en juego son los mismos y por lo tanto no es necesario repetirla? ¿Reflexionan sobre la situación antes de resolverla o buscan una cuenta que se "adapte" a ella? ¿No es posible resolver "problemas" sin hacer "cuentas"? Los alumnos de Inicial y Primer año pueden hacerlo, sin embargo los de tercer año ¿necesitan la cuenta para justificar su procedimiento porque aprendieron que toda situación debe resolverse haciendo cuentas?

³⁰ Las expresiones "número natural" y "número mixto" no se utilizarán con los alumnos así como tampoco la expresión $\frac{13}{2}$ si los alumnos no la plantean.

También es posible que el planteo de la cuenta sea para algunos alumnos una forma de justificar la respuesta. Es decir que es obvio para ellos que el reparto solicitado implica la operación de dividir, por lo que la plantean a los efectos de evidenciar el procedimiento que usaron. Podría ser una forma de “justificación matemática” en el nivel en el que estamos trabajando aunque en este caso no funcionó como tal.

La mayoría de los equipos, realizan el reparto exhaustivo de las hojas y dan como respuesta la imposibilidad de hacerlo con las bolitas.

Los grupos que toman en cuenta que, en estas situaciones, la exhaustividad del reparto depende de los materiales, después de hacer la división dibujan las hojas restantes y representan en ellas las divisiones para obtener la respuesta. Dos alumnos dibujan las hojas sobrantes partidas en mitades pero no las toman en cuenta para responder a la situación.

En muchos casos aparece la división y el cociente es tomado implícitamente como resultado sin haber ninguna conclusión o “respuesta” de los alumnos. En otros aparece la respuesta “seis cada uno” sin tener en cuenta el resto resultante. Parecería que para ellos, el resto no es una parte importante del resultado de la “cuenta”.

Las producciones parecen indicar que el intercambio y la necesidad de aunar criterios para la resolución, en la dupla, hacen jugar de manera efectiva la situación por encima de la “cuenta”. Es necesario ponerlo en evidencia en la puesta en común por parte del docente. Solo una alumna del grupo que trabajó en forma individual aporta: “Solo que María puede partir las hojas y éste no puede repartir (bolitas). Las hojas se pueden partir y le da la mitad, quedaron seis pedazos”.

En la puesta en común se hace hincapié en la posibilidad de repartir el resto resultante de la división y la maestra ejemplifica con magnitudes que pueden originar un reparto exhaustivo y aquellas en las que esto no es posible.

El objetivo apuntaba a ello, es la situación la que da sentido a las operaciones que se realizan siendo necesaria la interpretación de los resultados.

En cuanto a los resultados en los cuales los alumnos mayoritariamente no toman en cuenta este dato ¿será lo sucedido una consecuencia de proponer “cuentas sueltas”, es decir, la cuenta por la cuenta misma y no como instrumento de resolución de una situación que le dé significado? ¿Los alumnos no pueden interpretar el resultado porque para ello es necesario tener en cuenta el contexto, lo que no se plantea generalmente? Muchas veces en la práctica habitual se presentan las operaciones “seltas” de manera que no es necesario analizar la situación para establecer la pertinencia del resultado. Esto es particularmente importante en la división en la que las situaciones como las que hemos presentado exigen diferentes respuestas, aún cuando la operación es la misma $39:6$ y los alumnos pueden dar como resultado 6 ó $6,5$. Si bien el docente puede considerar correctas ambas respuestas, es la situación la que valida la respuesta y no el docente. Finalmente, surgen otras interrogantes en relación con lo anterior: ¿para qué sirven las cuentas si no es para resolver problemas? ¿Cuál es el mensaje de las prácticas habituales del “resuelvo” y del “opero”? ¿Qué diferencia hay entre responder “seis coma cinco hojas” y “seis hojas y media” aunque en ambos casos el resultado de la división es $6,5$?

Por otro lado ¿podrá esta dificultad ser consecuencia de la falta de discusión acerca de la pertinencia del resultado? Muchas veces los alumnos se limitan a dar como respuesta el resultado de la cuenta y no hay instancias de discusión y reflexión acerca de la pertinencia de éste.

Por ello pensamos que discusiones de este tipo pueden presentarse en todos los grados adecuándolas al nivel de los alumnos y a los requerimientos programáticos. En los más pequeños, no se espera la escritura de fracciones para expresar el resultado ni el uso de

expresiones decimales. Bastará con “6 y un pedazo” que se irá convirtiendo, a medida que se avance en la escolaridad, en 6 y medio, $6\frac{1}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{26}{4}$, 5 y $\frac{3}{2}$, 6,5, $\frac{65}{10}$ y otras expresiones que permitirán analizar la equivalencia de las mismas.

La presentación de este tipo de situaciones acerca a los alumnos a la discusión y a la reflexión sobre el hacer matemático, obligándolos a tomar decisiones para dar respuestas. Decisiones que deben ser de cada alumno y no del maestro cuando dice si “el problema está bien o no”.

Actividades para relacionar

Con esta actividad se apunta a trabajar la equivalencia entre fracciones.

Consigna escrita

Unos niños trabajaron con este problema:
Para hacer 1 litro de jugo ¿cuántos vasos se necesitan en cada caso?

Equipo 1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
Equipo 2	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
Equipo 3	$\frac{1}{4} \times 4$
Equipo 4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

¿Están todas bien? ¿Por qué?

¿Dónde está $\frac{1}{4}$ en lo que escribió el equipo 1?

¿Y en lo del equipo 4?

Esta actividad permite retomar lo trabajado en las anteriores del tramo relacionar, pidiendo expresamente que se busquen las relaciones entre las equivalencias planteadas en esta situación. Aparece como pregunta “¿dónde están los cuartos en los medios?” relación que debieron establecer a partir de actividades anteriores. Se espera que los alumnos puedan hacerlo sin el apoyo del docente, lo que evidenciaría la construcción de dicha relación.

Condiciones de realización

Organización en duplas

Forma de gestión

En la recorrida por los grupos el docente deberá estar atento a las discusiones que se planteen así como a las justificaciones que den los alumnos sobre la validez de las respuestas a los efectos de retomarlas en la discusión grupal. Del mismo modo el docente irá interviniendo en forma permanente, a los efectos de que los alumnos puedan dar respuesta a la segunda pregunta, es decir buscar las equivalencias entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ ó entre $\frac{4}{4}$ y $\frac{2}{2}$.

En la puesta en común será necesario insistir sobre la argumentación que den los alumnos a manera de validar sus respuestas y confrontarlas permanentemente con las conclusiones de otros grupos a fin de poder institucionalizar las equivalencias trabajadas.

Procedimientos posibles

- Validar lo realizado en la tabla con argumentaciones del tipo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.
- No validar $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ como operación posible.
- No ver la relación de equivalencia entre cuartos y medios.
- Decir que la suma de cuartos y medios da como resultado una fracción con denominador 6.
- Para $\frac{1}{4} \times 4$ dar como resultado una fracción con denominador 16 ($\frac{4}{16}$ ó $\frac{1}{16}$).

Descripción de lo sucedido

En la recorrida por los grupos se observa que algunos revisan su cuaderno buscando actividades realizadas a modo de consulta.

En general todas las duplas resuelven sin errores la primera parte de la actividad. Hay ciertas dificultades para contestar la segunda pregunta pero en general encuentran herramientas para hacerlo o lo resuelven con pequeñas intervenciones realizadas por la docente.

En las resoluciones de los alumnos se observa que aún cuando contestan correctamente aparecen justificaciones del tipo :

- $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- $\frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{16}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$
- "el equipo 4 se equivocó porque no se puede sumar un medio y un cuarto"

En general todos coinciden en el error de la afirmación del equipo 4. Es interesante ver como varias duplas pueden justificar el punto 2 y 3 diciendo:

- $\frac{1}{4}$ es la mitad de $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$ son $\frac{2}{4}$
- Una sola dupla afirma que $\frac{1}{4}$ "no está en ningún lado".
- Una dupla dice que el punto 4 de la tabla está mal porque $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ daría $\frac{2}{6}$.
- Otros alumnos argumentan: "no completa un litro", " le falta $\frac{1}{4}$ litro", "son 750cc" ...

La actividad resulta potente para aquello que se quiere trabajar.

En general resuelven bien la primera parte encontrando sin dificultad la aseveración errónea. La mayoría puede detectar el error.

Las intervenciones docentes apuntan a que los alumnos busquen una "misma unidad"(cuartos) para sumar, apoyándose en lo que ya han trabajado acerca de la equivalencia de fracciones.

En la segunda y tercera pregunta en general aparecen justificaciones que dan cuenta de las equivalencias trabajadas en la expresión $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ así como al expresar que $\frac{1}{4}$ es la mitad de un medio.

En general se ven avances muy importantes en los alumnos para completar la unidad con cuartos o medios así como en el uso de la relación de equivalencia entre ellos.

La actividad aparece como muy potente al permitir retomar las relaciones en la puesta común, promoviendo las argumentaciones y comparaciones que los alumnos están en condiciones de hacer.

Actividad

En las dos actividades siguientes se ponen en juego las relaciones entre la parte y la unidad a partir de representaciones gráficas no convencionales.

Parte A

Consigna escrita

En cuáles de estas figuras se pintó $\frac{1}{4}$? ¿Cómo lo sabes?

En esta actividad se trabaja también con representaciones numéricas. Se trabaja con cuartos entendiendo que este tipo de representaciones fueron apareciendo a partir de las explicitaciones y comunicaciones solicitadas en actividades anteriores³¹

Condiciones de realización

Organización: Individual

Forma de gestión

Interesa ver la igualdad de las partes como condición necesaria para “tener cuartos”; es decir establecer la diferencia entre una unidad partida en cuatro partes y partida en cuartos. La igualdad de las partes en una fracción, es el centro a institucionalizar en esta actividad para entender que $1 = \frac{1}{n} \times n$ o sea que uno es igual a $\frac{n}{n}$. Esto no se cumple si no se establece la igualdad de las partes.

Procedimientos posibles:

- Marcar como $\frac{1}{4}$ todas las partes pintadas en las figuras divididas en cuatro partes sin tener en cuenta la igualdad de las mismas.

³¹ Es importante que los alumnos de 3er año hagan un uso fluido de las denominaciones “un medio, un cuarto, un octavo” y otras. No se debería aceptar ya las denominaciones de “grandes, chicos y medianos”.

- No reconocer como $\frac{1}{4}$ la primera figura por no estar representadas las cuatro partes.
- Señalar como $\frac{1}{4}$ sólo la figura en la que las partes son iguales.

Parte B

Consigna escrita

Si hay $\frac{1}{4}$ dibujado, tienes que pintarlo.

En esta parte de la actividad se pretende obstaculizar el reconocimiento a simple vista de los cuartos ya que no es explícita la igualdad de las partes. La actividad exige centrarse en la relación entre el tamaño de la parte y la unidad.

Hasta el momento los alumnos han representado o han visto representadas todas las partes en la unidad lo que permite proceder por conteo obviando la relación entre cada parte con el "todo". En este caso los alumnos deben establecer la relación entre las superficies de las partes con la unidad para encontrar aquella que repetida cuatro veces (o sea $\frac{1}{4} \times 4 = 1$) constituye la unidad. Para hablar de fracción, no es necesario que aparezcan dibujadas todas las partes iguales.

La unidad puede estar dividida en partes diferentes, no obstante lo cual una de ellas es $\frac{1}{4}$ ya que se necesitan cuatro iguales para completar la unidad.

En una unidad pueden representarse cuartos y quintos a la vez. Esto no es obstáculo para que cada una de ellas represente una parte diferente de la unidad. Este enfoque, diferente al usual, pretende desprender a los alumnos de lo perceptivo y del conteo para acercarlos a las relaciones entre las partes y el todo.

Condiciones de realización

Organización: en duplas

Forma de gestión

Esta actividad necesita de un fuerte monitoreo del trabajo de los alumnos puesto que se presenta una dificultad que puede ser importante en virtud de que en algunos casos no se encuentran todos los "cuartos" dibujados o en que otros las partes representadas no son iguales. Las intervenciones del docente adecuadas durante la recorrida por los grupos ("intenta dibujar otras de esas partes sobre la unidad", "puedes recortar"... y otras de ese tipo) ayudarán a los alumnos a buscar procedimientos de resolución pertinentes. Relacionar esta actividad con lo realizado en la primera parte de la actividad también puede ser un apoyo al cual el docente podrá recurrir.

En la puesta en común es importante enfatizar la relación entre la parte y el todo más allá de la cantidad de ellas que se encuentre representada. Del mismo modo es importante llegar a explicitar numéricamente que $\frac{1}{n} \times n = 1$.

Con ello se pretende pasar de una presentación netamente escolar a otra que ponga en juego fuertemente las relaciones subyacentes ya que en realidad no es lo común tener que resolver problemas de reconocimiento o representación con todas las partes representadas fuera del ámbito escolar. Del mismo modo no debemos olvidar que la representación gráfica de las fracciones que presenta generalmente la escuela, es una construcción escolar que no suele aparecer en los problemas de la vida real. La idea de fracción no debería remitir a la unidad dividida en partes iguales sino a la relación de una cantidad con el total independientemente de tener presentes las otras partes que la forman.

Procedimientos posibles

- Señalar cualquiera de las partes independientemente de considerar la igualdad de las mismas, poniendo en evidencia que el procedimiento utilizado es el conteo.
- No señalar ninguna de las partes por no estar representadas las 4 partes iguales.
- Señalar correctamente considerando la relación entre la superficie total y la de cada parte.

Descripción de lo sucedido

Parte A

La mayoría de los alumnos marcan las figuras que están divididas en 4 partes sin tener en cuenta la igualdad de las mismas. Parecería que la idea de cuartos se asocia con esta división no siendo un elemento a considerar la equidad de las partes. Esta idea hace que quede incluido en lo que marcan, el cuadrado que efectivamente está dividido en cuartos.

La otra variable que tienen en cuenta es la forma de la unidad. De esta manera algunos alumnos marcan sólo los dos rectángulos. Tal vez ello se asocie con la idea de que la unidad "debe ser rectangular", idea fuertemente asociada a las representaciones que con mayor frecuencia presenta la escuela.

Dos alumnos señalan sólo el cuadrado lo que haría pensar que, si bien se tiene en cuenta el número y la equidad de las partes, no se reconoce la fracción si no aparecen todas las partes señaladas.

Algunos de los alumnos que marcan correctamente, argumentan que "es un cuarto porque tiene todos los lados iguales".

Parte B

A excepción de un niño, todos los alumnos pintan el segundo dibujo en el que aparecen cuatro partes no iguales.

En síntesis, la actividad no fue resuelta con éxito por la mayoría de los alumnos.

Los errores hacen pensar en:

- la asociación de la idea de cuartos con la división de la unidad en cuatro partes,
- la ausencia de control en cuanto a la equidad de las partes. Esto requiere la iteración de la parte pintada en la unidad.
- la tendencia a trabajar sólo con "unidades rectangulares".

Lo anterior haría pensar en estos errores como posible consecuencia de una presentación escolar fuertemente referida a la fracción como parte de un todo que ofrece generalmente unidades de forma rectangular o circular, donde se incluyen las divisiones necesarias y se respeta la equidad de las partes.

De este modo los alumnos no construyen las relaciones esenciales porque las mismas siempre están dadas en lo que la escuela presenta y en general no se hacen explícitas.

En cuanto al reconocimiento de la unidad ligado a la figura del rectángulo, cabría preguntarse si además de lo ya dicho no habrá incidido el trabajo del tramo anterior en el que se

plantearon varios repartos de barritas de cereal, las que en general se presentan con esta forma.

Actividades de este tipo, propuestas con mayor frecuencia en detrimento de las habituales representaciones, podría acercar a los alumnos a la necesidad de poner en juego relaciones ya que el simple conteo de partes no las soluciona. Por lo demás, permitirían trabajar la idea de que $\frac{1}{n}$ es tal, en la medida que $\frac{1}{n} \times n = 1$ que sería una forma adecuada para este nivel de acercarse a la idea de fracción.

Actividad de medida

Con esta actividad se pretende que los alumnos utilicen la fracción para expresar el resultado de una medición efectiva.

Consigna oral

Ustedes tienen dos tiras. Tienen que darle la orden al otro equipo para que construyan una tira igual a la más larga de ustedes. Tengan en cuenta que ellos tienen sólo la tira corta.

Condiciones de realización

Organización: equipos de 4 integrantes.

Materiales:

Para cada grupo:

Tira larga que mide $1\frac{1}{2}$ de unidad.³²

Una banda que representa la unidad de medida (tira corta).

Forma de gestión

Esta actividad es parte de una serie de actividades, y se busca avanzar sobre la anterior ya que la relación entre la cantidad de longitud a medir y la unidad usada, obliga a fraccionar la unidad para poder expresar la medida. En la actividad anterior solamente se iteraba un número entero de veces la unidad para poder obtener la medida de la tira solicitada. Por tal motivo la medida se expresa con una fracción $\frac{3}{2}$ o una expresión equivalente ($1\frac{1}{2}$).

En la puesta en común podrá analizarse el procedimiento realizado para efectuar la medición: la necesidad de fraccionamiento de la unidad, la expresión de la medida como número mixto y la equivalencia de expresiones $\frac{3}{2}$ con 1 y $\frac{1}{2}$ en el caso de que algún grupo usase la expresión fraccionaria.

Es importante analizar con los alumnos la relación entre esta actividad y las que se efectuaron en el tramo "reparto". En esta se debe "fraccionar la unidad" y en aquellas actividades de reparto se discutieron los casos en que era posible "fraccionar el resto resultante de una división".

³² Este dato es desconocido por los alumnos.

Procedimientos Posibles

- Iterar la tira unidad y comunicar que entra “una vez y un poco” sin cuantificar ese “poco”.
- Iterar la unidad y comunicar expresando que la tira larga mide “casi dos veces”.
- Observar que la tira larga mide una vez y cuantifica la otra parte como “la mitad” de la tira corta.
- Doblar a la mitad la tira corta y decir que la larga mide tres, al cambiar de unidad. (Tomar la mitad de la tira corta como unidad)

Descripción de lo sucedido

Las respuestas de las duplas pueden sintetizarse en estas expresiones de los alumnos:

- “Se precisa una tira corta y $\frac{1}{2}$ ”
- “Hay que doblar la tira chica a la mitad y entra 3 veces”
- “Entran $\frac{3}{2}$ ”
- “Le falta media tira corta”

Se transcriben algunos fragmentos de diálogos que se produjeron entre la maestra y algunos equipos.

Equipo 1

A: - Yo digo que es una tira y un cuarto.

M: - ¿Cómo saben que es $\frac{1}{4}$?

A: - Lo miro y me parece que es $\frac{1}{4}$.

M: - ¿Cómo lo puedes comprobar?

A: - Lo marco, es una mitad.

M: - ¿Cómo sabes que es la mitad? Busquen cómo comprobarlo.

Equipo 2

A: - Tiene que medir $1\frac{1}{2}$

M: - ¿Cómo saben?

A: - Lo medimos.

M: - ¿Cómo lo hicieron?

A: - Lo miramos, no se puede poner en cualquier lado.

(No se dan cuenta que deben plegar la tira para comprobar que es $\frac{1}{2}$)

Equipo 3

A: - Nosotros pusimos la corta pero nos sobra.

M: - ¿Cuánto sobró?

A: - La mitad.

M: - ¿Cómo lo comprobaron?

A: - Con una rayita. Pusimos los dedos y hay lo mismo de los dos lados.

En la puesta en común la maestra invita a los alumnos a que superpongan la tira que dibujaron y la unidad para comprobar si es una vez y media la tira corta.

Es un intento de verificar que lo que realizaron intuitivamente o midiendo con la cantidad de dedos.

No aparece ninguna dificultad en expresar la medida, sí observamos que en forma colectiva surgió la idea de doblar a la mitad la banda unidad.

Como se aprecia las respuestas de los alumnos dan cuenta de haber podido resolver una actividad compleja.

La variedad de expresiones para la respuesta daría la posibilidad de realizar una confrontación interesante buscando similitudes y diferencias entre estas expresiones.

Las respuestas consignadas dan la pauta de la potencia de la actividad que creemos fue adecuada para ese momento de la secuencia, los alumnos pusieron en juego procedimientos de medición que comenzaron a desarrollarse en actividades anteriores.

Propuesta para 4° año

Actividades de reparto

Las dos actividades que siguen buscan trabajar la equivalencia de expresiones fraccionarias.

Consigna escrita

Matías tenía 3 chocolates para repartir entre 5 niños. ¿Son equivalentes las siguientes formas de reparto?

- Parte cada chocolate en 5 partes iguales y le da una parte de cada chocolate a cada niño

- Parte por la mitad cada uno de los 3 chocolates y le da una mitad a cada niño. La última mitad la parte en 5.

Expresen en fracciones los resultados de ambos repartos.

Condiciones de realización

Organización: en una primera instancia se trabajará individualmente y luego en dupla para posibilitar el intercambio entre los integrantes de la misma.

Forma de gestión

Proponer la actividad y observar cómo enfrenta cada niño el problema. En la instancia de trabajo en pareja observar aquellas duplas en las que los integrantes tengan procedimientos o resultados diferentes. Es importante ver si hay discusión para convencer al otro o simplemente modifican rechazando la opinión de uno de los integrantes. El docente podrá registrar los diálogos que se den para luego, durante la puesta en común, manejar la información sobre el desarrollo de la actividad.

En esta instancia será necesario provocar confrontaciones que obliguen a la utilización de argumentaciones. Si no aparecieran argumentaciones fuertes, el maestro deberá presentar algunas para exigir a sus alumnos que reflexionen sobre lo planteado.

La institucionalización debe apuntar fuertemente a la equivalencia de las distintas expresiones que expresen el resultado del reparto.

“Este problema exige a los alumnos expresar numéricamente los resultados de ciertos repartos y analizar su equivalencia. En tanto el “objeto” de trabajo es el análisis de diferentes repartos ya hechos y no simplemente su realización como en los casos anteriores, los alumnos deben ubicarse en posición de comprender las relaciones establecidas por un “otro” hipotético.

Esta posición es más exigente que la de “hacer” y ofrece la posibilidad de ampliar las relaciones inicialmente establecidas.

Notemos que el problema “requiere” que los alumnos piensen en fraccionar una fracción aunque no se está dando el tema “fracción de fracción” de manera formal. Abordar problemas más o menos abiertos hace necesario aplicar conocimientos que en una presentación didáctica “paso a paso” aparecen normalmente separados. Esta mayor

complejidad – la de poner en juego varias nociones juntas- a nuestro juicio permite una mejor comprensión del funcionamiento de los conceptos que se están estudiando dado que hace posible que se establezcan relaciones que no son visibles cuando cada idea se trabaja separadamente de las otras.”³³

Procedimientos posibles

- Realizar representaciones gráficas para identificar los resultados de ambos repartos, comparando cada resultado sin expresarlo numéricamente.
- Apelar a la representación gráfica logrando representar numéricamente cada fracción y compararlas luego.
- Expresar numéricamente los repartos pero no poder compararlos.
- Expresar numéricamente en una sola fracción el primer resultado pero en el segundo reparto solamente expresar $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$, sin obtener una única fracción que represente dicha situación.
- Expresar numéricamente los dos procedimientos de repartos ofrecidos y concluir que son equivalentes.

Descripción de lo sucedido

La mayoría de los alumnos apela a la representación gráfica para comenzar a resolver la actividad.

En el desarrollo de la misma los niños resuelven con facilidad el primer reparto identificándolo con la fracción $\frac{3}{5}$.

No sucede lo mismo en el segundo reparto. En éste la dificultad planteada de repartir el último medio entre cinco produce desconcierto. Trabajan de forma gráfica pero no pueden concluir que cada niño recibe nuevamente $\frac{3}{5}$.

Algunas duplas para calcular $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$, realizan $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$, lo que podría hacer pensar que no han construido aún la relación que implica la fracción de fracción. Intentan realizar una suma, que resuelven con sus conocimientos sobre los números naturales. No es objetivo del problema sumar fracciones de diferente denominador, sino que se pretende apelar a las relaciones a través de representaciones gráficas: subdividir cada medio en quintos, logrando así trabajar con décimos, observando que $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Un número importante de niños deja expresado $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ sin poder avanzar en la respuesta final. Al no poder representar numéricamente con una sola fracción el segundo reparto se les hace difícil la comparación.

Sin duda realizar una representación gráfica de la situación no ha sido problema para estos niños de 4° año. Sin embargo identificar el cociente asignado por un cierto reparto presenta una dificultad mucho mayor.

En definitiva la actividad presentó dificultades a la hora de identificar la equivalencia entre los repartos realizados por Matías.

Observando lo sucedido en el aula podemos afirmar que este tipo de problemas es mucho más costoso que el de representar solamente los repartos. Los alumnos deben colocarse en situación de interpretar lo realizado por otro y extraer conclusiones, argumentando convenientemente.

³³ Sadovsky, P. (coordinación), (2005c).

El recurso de observar a la interna de cada reparto las relaciones entre los números que se establecieron es sustancial, pues permite identificar la equivalencia de los repartos. Apelar a la representación gráfica es fundamental pues se puede observar la transformación de los chocolates en "quintos", "medios", "décimos", aún cuando sigue siendo la misma cantidad, en este caso, tres chocolates.

Actividad

Consigna oral

Encuentren tres formas equivalentes de repartir 8 chocolates entre 3 chicos.

Condiciones de realización

Organización: en duplas

Forma de gestión

Proponer la actividad e ir observando los procedimientos que van apareciendo en las diferentes duplas. Sin duda la actividad anterior sirvió como modelo de diferentes repartos. Los alumnos podrán apelar a la situación anterior para entender qué es lo que se pretende con "formas equivalentes de repartir..."

En la institucionalización se tendrá en cuenta la equivalencia de los repartos, es decir, poner en palabras la relación entre los repartos establecidos por los niños. Se podrá observar dónde se encuentran los $\frac{8}{3}$ en cada caso, en definitiva se exige expresar argumentaciones para fundamentar la equivalencia de los repartos. En esta actividad es importante introducir la notación matemática y establecer relaciones llegando a escrituras de este tipo:

$$2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{2} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 8$$

Lo importante es que sean los niños quienes realicen estos planteos.

Procedimientos posibles

•
$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ 2 & 2 \end{array}$$

↙

$\frac{1}{3}$ para cada uno
 $\frac{1}{3}$ para cada uno

$$2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

-

- También se podrán dividir los ocho chocolates en tercios y afirmar que a cada uno le toca $\frac{8}{3}$

Descripción de lo sucedido

Surgió una multiplicidad de repartos que dieron la posibilidad de relacionar las diferentes expresiones fraccionarias y observar su equivalencia.

A continuación se presentan algunas respuestas dadas por los alumnos. No todas son correctas.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$2 \text{ y } \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{16}{6}$$

$$\frac{4}{2} \text{ y } \frac{2}{6} \text{ de } \frac{1}{2}$$

$$2 \text{ y } \frac{2}{8}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{2}$$

Poder relacionar las expresiones anteriores y observar la equivalencia de las mismas, a partir de lo que los niños hicieron, dio la posibilidad de un trabajo potente comparado con lo que pudiera haber surgido si se apelaba a la comprobación algorítmica de dichas equivalencias.

Por ejemplo $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ es equivalente a $2 \text{ y } \frac{2}{3}$ porque:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_1 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

Aparecieron diferentes formas de escrituras para representar el mismo reparto, lo que permitió realizar comparaciones.

Un pequeño número de niños aún utiliza la división con un cociente decimal y no da respuesta a la propuesta.

Para algunos niños la propuesta resultó un verdadero desafío ya que fueron intentando repartos cada vez más complejos logrando observar la equivalencia entre ellos con argumentos como los que ejemplificamos anteriormente.

En la institucionalización se apeló a elegir aquellas escrituras equivalentes utilizadas por la mayoría de los alumnos con el fin de compartir los argumentos.

La actividad que se presentó anteriormente aportó elementos para la resolución de ésta y permitió generar avances. Es una actividad “fuerte” si el docente logra que sus alumnos argumenten la equivalencia entre las diferentes expresiones. Si no es así la actividad pierde la potencia porque se limitaría a una lista de expresiones equivalentes sin sentido para el alumno si no fue él quien la construyó. La puesta en común juega un rol muy importante en la gestión de la actividad porque allí aparecen los argumentos dados por los alumnos para probar la equivalencia. De esta manera, aquellos alumnos que habiendo encontrado las equivalencias en juego no habían podido fundamentar sus resultados, pueden encontrar en esta instancia los argumentos necesarios para justificar lo realizado.

Actividad para relacionar

Se pretende que los alumnos establezcan relaciones numéricas para componer la unidad a partir de diferentes fracciones.

Consigna escrita

a) La mamá de Matías compraba todas las semanas 2 kilos de galletitas. Ella se armó una tablita que le permitía comprar rápidamente los paquetes de galletitas que necesitaba según el peso de cada paquete. ¿Cómo se completa la tabla?

Si los paquetes tienen	Necesito
kilo	
$\frac{1}{2}$ kilo	
$\frac{1}{3}$ kilo	
$\frac{1}{6}$ kilo	
$\frac{1}{8}$ kilo	

b) La mamá de Juan que siempre salía de compras con ella quiso imitarla entonces armó su tablita. Ella compraba siempre 3 kilos de galletitas. ¿Es correcta la tabla que se armó? En caso que alguna cantidad de paquetes sea incorrecta, corrígela.

Si los paquetes tienen	Necesito
$\frac{1}{4}$ kilo	12 paquetes
$\frac{1}{2}$ kilo	6 paquetes
$\frac{1}{3}$ kilo	10 paquetes
$\frac{1}{6}$ kilo	16 paquetes
$\frac{1}{8}$ kilo	24 paquetes

c) El almacenero que no se quedaba atrás tomó rápidamente la idea y se armó su propia tabla.

Peso del paquete	Para 1 kilo	Para 2 kilos	Para 5 kilos	Para 10 kilos
$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{4}$				
$\frac{1}{2}$				

Condiciones de realización

Organización: la tabla a) se realizará en dupla. La tabla b) en forma individual y la c) nuevamente en dupla.

Forma de gestión

La propuesta de variar la organización da la posibilidad de que las elaboraciones hechas en forma grupal aporten al pensamiento individual y viceversa. También es importante que los niños descubran el potencial de estas dos formas de trabajo.

En la puesta en común se analizará cada una de las tablas y se establecerán las relaciones que surjan.

Esta actividad permite observar que las fracciones en juego son del tipo $\frac{1}{n}$ y con ellas se deben formar las cantidades pedidas. Está implícita la idea de que $1 = n \times \frac{1}{n}$, por lo tanto $2 = 2n \times \frac{1}{n}$, etc.

Se tendrá en cuenta a la hora de la puesta en común no solamente la solución del problema, sino la reflexión sobre las distintas formas de resolución dando lugar a fundamentar las relaciones utilizadas para completar la tabla.

“El problema a) donde se propone armar 2 kg de galletitas con paquetes de diferentes cantidades, permite establecer diferentes relaciones. Por un lado las relaciones de proporcionalidad directa que si bien no se dan con este nombre ni se sistematizan a propósito de este contenido, son usadas tempranamente en la escolaridad.

Si para tener 1 kg de galletitas necesito 4 paquetes de $\frac{1}{4}$ kg para tener 2 kg voy a necesitar el doble o sea 8 paquetes. Pero al mismo tiempo hay una relación inversamente proporcional entre el tamaño de los paquetes y el número de paquetes necesario para obtener la misma cantidad total.

Si los paquetes son de $\frac{1}{4}$ kg necesito 8 paquetes para tener 2 kg de galletitas. Los paquetes de $\frac{1}{2}$ kg son el doble de grandes entonces necesito la mitad de los paquetes. Será importante escribir y completar las tablas en el pizarrón para hacer los análisis antes mencionados con los alumnos.

Las relaciones que se hayan establecido para completar la tabla a) servirán de punto de apoyo a la hora de analizar la tabla b).

Luego del análisis caso por caso, se puede proponer un análisis global de todas las tablas.

Se podrá identificar que:

$$12 : 4 = 3$$

$$6 : 2 = 3$$

$$24 : 8 = 3 \quad \text{pero} \quad 10 : 3 \text{ no es igual a } 3$$

$$16 : 6 \text{ no es igual a } 3$$

Entonces: $\frac{1}{4} \times 12 = 3$

$$\frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\frac{1}{8} \times 24 = 3$$

Todas estas relaciones no surgen solamente de la resolución sino de una reflexión sobre la misma que, para que tenga lugar en la clase, deberá ser provocada explícitamente por el docente. Nuevamente vemos acá, al igual que con los repartos, que los conocimientos que se producen al analizar las resoluciones son diferentes de aquellos que se elaboran en la resolución misma.”³⁴

Procedimientos posibles

- Completar las tablas apelando a que $\frac{1}{4}$ repetido cuatro veces, es uno. De igual manera para el resto de las fracciones.
- Para formar 1 kg podrían plantear $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$
- Para formar 1 kg podrían plantear $4 \times \frac{1}{4}$
- En la tabla b) se podría establecer, observando la fracción en juego, que la cantidad de paquetes mantendría la relación doble, triple, etc.
- También en la tabla b) (para corregir por ejemplo el número de paquetes de $\frac{1}{3}$), se podría establecer que diez paquetes de $\frac{1}{3}$ es incorrecto porque $3 \times 3 = 9$ y no diez como aparece en la tabla.
- Para la tabla c) proceder multiplicando a partir de lo encontrado para 1 kg, para 2 kg el doble, para 5 kg multiplicar por 5, etc.

Descripción de lo sucedido

En la recorrida por los diferentes equipos se observan los siguientes comentarios realizados por los alumnos en los que se evidencian las relaciones que ellos encuentran al completar la tabla:

- “4 veces $\frac{1}{4}$ es un kilo, más 4 veces son dos kilos.”
- “El tercio es impar, no sabemos. Pero el tercio en el kilo entra, son 3 tercios.”
- “Podés pensar con un cuadrado dividido en tres.”
- “Con sextos tiene que ser el doble que con tercios.”

Los alumnos plantean las relaciones que observan y comienza una buena discusión sobre las argumentaciones para completar la tabla.

El trabajo con la fracción $\frac{1}{3}$ mostró mayor dificultad que los otros casos. Para resolver la

³⁴ Sadovsky, P. (coordinación) (2005c).

primer tabla apelan a que " $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, entonces para 2 kilos se precisarán 3 paquetes más, de ahí es que necesitamos 6 paquetes"

Los alumnos logran completar todas las tablas explicitando las relaciones y argumentando cómo lo hicieron. Se apoyan en la tabla 1 para revisar la tabla 2 y corregir los errores.

Proceden utilizando estrategias similares a lo realizado en la tabla 1.

A modo de ejemplo para revisar qué sucedió en la tabla 2 con los paquetes de $\frac{1}{3}$, se plantea el siguiente diálogo:

A1 - "Mal porque tres por tres no es diez.

A2 - " $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{9}{3}$ "

La maestra interviene y expresa: "Entonces son nueve paquetes de un tercio"

A3 - ¿No se suman los de abajo?

M - ¿Cambiarías entonces los tercios por novenos?

A3 - "No, quiero tercios, entonces no se suman"

Esta intervención de la docente habilita al alumno a que pueda responder su propia interrogante observando que está trabajando con tercios y entonces al sumarlos también necesita el resultado en tercios, sin la necesidad de trabajar con las reglas algorítmicas.

Se compusieron las cantidades a partir de otras expresadas por fracciones.

La puesta en común evidencia que se pueden trabajar diferentes relaciones y explicitarlas.

Estas relaciones del tipo " $\frac{1}{3}$ es el doble de $\frac{1}{6}$ ", son las que permanecen a lo largo de las actividades independientemente del contexto en el que se trabaje.

Las relaciones surgidas a partir de las tablas presentadas cuestionan y ponen en juego lo aprendido hasta el momento con fracciones en cuanto a la composición de cantidades.

Sin duda la tabla 2 en la que debían trabajar con la producción realizada por otro es la que ofrece dificultad en el momento de completar y observar los errores del otro. Las argumentaciones allí aparecidas son muy ricas.

Las relaciones de proporcionalidad observadas en algunos casos posibilitaron el trabajo de completar las tablas, aunque estas relaciones no eran el objetivo de la actividad. Las relaciones que aparecieron dan cuenta de un trabajo docente intencionado, explícito, para hacerlas surgir. Los conocimientos puestos en juego, al reflexionar sobre producciones ya hechas (tabla 2), son diferentes a los que se utilizan cuando se resuelve la actividad. Así aparece la composición de diferentes cantidades a partir de fracciones, esto produce un enriquecimiento entre las relaciones con las fracciones.

Propuesta para 5° año

Actividades de reparto

En las tres actividades siguientes se pretende establecer equivalencias de fracciones como resultado de diferentes repartos.

Consigna escrita

Analiza si, para repartir en partes iguales 3 chocolates entre 4 niños, son o no equivalentes los siguientes procesos:
Repartir cada uno de los tres chocolates en 4 partes iguales y dar a cada niño una parte de cada chocolate.
Partir por la mitad dos de los tres chocolates y dar una mitad a cada niño y partir el tercer chocolate en cuatro.
Expresa, usando fracciones, cada uno de los repartos anteriores. Ahora analiza y argumenta si son o no equivalentes las expresiones que surgen en cada caso.

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Forma de gestión

El maestro propone la actividad brindando a cada dupla la consigna en forma escrita. En el momento de presentar la consigna no se realiza la lectura de la misma por parte del docente permitiendo de esta forma que cada dupla realice la interpretación de la actividad planteada.

Procedimientos posibles

- Realizar representaciones gráficas del reparto de los chocolates pero no llegar a analizar la equivalencia de los mismos.
- Trabajar con expresiones decimales adjudicándole a cada niño 0,75 chocolate. Argumentar que los repartos son equivalentes.
- Realizar el primer reparto dándole $\frac{1}{4}$ de chocolate a cada niño y en el segundo reparto sólo expresar que a cada niño le tocará $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de chocolate. No lograr expedirse sobre la equivalencia en los repartos.
- Dividir cada chocolate en ocho partes iguales para analizar los repartos. Obtener fracciones equivalentes.
- Considerar una "nueva unidad" a repartir formada por la unión de los tres chocolates, por lo que pasan a repartir el número $\frac{12}{12}$ en cuatro, obteniendo como resultado $\frac{3}{12}$.

Descripción de lo sucedido

Se observó que la totalidad de las duplas se abocó inicialmente a realizar los repartos que la situación plantea. Algunos alumnos se apoyaron en dibujos y otros en operaciones que incluían escrituras decimales.

En estas duplas pudo observarse que algunas no pudieron avanzar más allá de las representaciones anteriores y por lo tanto no pudieron establecer la equivalencia de los repartos. En el trabajo desarrollado por otras se observó que sólo compararon las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ argumentando entonces que los repartos no eran equivalentes. En estos equipos se

constató la pérdida de control del reparto realizado, pues a los niños a los que se les dio, en primera instancia, un cuarto de chocolate se les daba también un medio.

Algunas duplas trabajaron únicamente con expresiones numéricas, sin apelar a representaciones gráficas. En los trabajos correspondientes a estas parejas pudo constatarse planteos de este tipo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Cuando la maestra intervino preguntando cómo obtuvieron esta suma, los alumnos argumentaron explicando que un medio era lo mismo que dos cuartos.

En la puesta en común, la maestra seleccionó a aquellas duplas cuyos trabajos eran representativos de lo sucedido en el aula para que comentaran cómo llegaron a identificar la equivalencia de los repartos.

Surgió la duda, ante el planteo que realizó una alumna, si se podían considerar los tres chocolates a repartir como $\frac{12}{12}$. Esta expresión la obtenían al dividir cada chocolate en cuatro partes iguales. El docente intervino focalizando la discusión en los correspondientes “todos” involucrados en los dos razonamientos planteados: 3 chocolates y 12 chocolates como un todo.

Fue evidente que la dificultad principal de esta actividad radicó en argumentar la equivalencia de los repartos realizados. Los alumnos pudieron efectuar cada reparto apelando adecuadamente a expresiones numéricas, fraccionarias o decimales, apoyándose en diagramas representativos de los chocolates.

Actividad

Consigna escrita

Para repartir 23 chocolates entre 5 chicos, Vanesa pensó lo siguiente:

“23 chocolates entre 5 me da 4 chocolates para cada uno, pues $4 \times 5 = 20$ y me sobran 3 chocolates que los corto cada uno en cinco partes y entrego una parte de cada chocolate a cada uno.”

En cambio Joaquín lo pensó así: “le doy 4 chocolates a cada uno igual que Vanesa pero con los 3 chocolates que quedan corto cada uno por la mitad y le doy una mitad a cada chico, luego divido el último medio en cinco y le doy una parte a cada uno”.

Analiza si son o no equivalentes los repartos de Vanesa y de Joaquín. Luego anota las expresiones fraccionarias que surgen de cada reparto y analiza y argumenta si son o no equivalentes. Si piensas que las expresiones fraccionarias son equivalentes, encuentra un modo de “pasar” de una a otra.

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Forma de gestión

El docente organiza la clase en duplas y le entrega a cada una la consigna. Una vez comenzado el trabajo por parte de los equipos, el docente recorre el salón registrando los procedimientos que se plantean y realizando intervenciones.

Procedimientos posibles

- Realizar los repartos mediante el uso de representaciones gráficas y no llegar a expresar la equivalencias de los mismos.
- Realizar los repartos mediante el uso de diagramas y dar expresiones fraccionarias sólo para el primero de ellos.
- Expresar en forma fraccionaria ambos repartos. Perder en el segundo reparto la fracción de fracción presente.
- Realizar la división $23:5$ y expresar el resultado en forma decimal $4,6$. Expresar el segundo reparto con la expresión decimal $4,5 + 0,2$ teniendo en cuenta que este último número equivale a $\frac{1}{5}$ (sin reparar que es $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$)
- Realizar adecuadamente los repartos trabajando con fracciones y argumentar adecuadamente la equivalencia de fracciones. Sumar fracciones.

Descripción de lo sucedido

La totalidad de la clase se apoyó en representaciones gráficas para la resolución de la actividad. En algunos casos la representación y correspondencia numérica posterior se hizo muy costosa impidiendo que los alumnos accedieran a los repartos propuestos y a la equivalencia de ellos.

Algunas duplas plantean, en el caso de Vanesa, que a cada niño le corresponde cuatro chocolates y $\frac{3}{5}$ de chocolate; para el caso del reparto de Joaquín escriben la adición $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 4$ pero no pueden calcularla.

Es de destacar que algunos equipos plantearon la operación $23 : 5$ obteniendo como cociente $4,6$. Al intentar expresar este resultado con una expresión fraccionaria anotan que a cada niño le corresponden $\frac{4}{4}$ de chocolates y $\frac{3}{5}$, representando con $\frac{4}{4}$ los 4 chocolates.

Al intentar expresar con fracciones el reparto de Joaquín se pudo observar que muchas duplas expresaban que a cada niño le correspondían cuatro chocolates más $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$, no pudiendo avanzar en esta respuesta por lo que el docente debió realizar algunas intervenciones.

Hubo dificultades para establecer relaciones entre las dos expresiones numéricas correspondientes a los repartos.

Algunos equipos, aún expresando que en el segundo reparto le corresponde a cada niño "4 chocolates, $\frac{1}{2}$ de chocolate y $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ ", no lograron expresar esto con una sola fracción.

Ante la intervención docente los alumnos lograron "reunir" 4 y $\frac{1}{2}$ aún cuando no pudieron identificar como una sola fracción al "quinto de un medio".

La dificultad para identificar la equivalencia entre $\frac{6}{10}$ y $\frac{3}{5}$ obstaculizó en parte el análisis de la equivalencia de los repartos.

Sabemos que el trabajo con fracción de fracción es de considerable dificultad. En el transcurso de las otras actividades de la serie los alumnos pudieron salvar ésta, atendiendo a la representación gráfica para observar la equivalencia de los repartos para luego trabajar sólo numéricamente.

La actividad exige pensar en repartos realizados por otros y además encontrar las justificaciones de esas equivalencias en los resultados de los repartos a pesar de que la "forma" de repartir sea diferente, lo cual resultó una dificultad importante en esta primera instancia por lo que necesitó de una fuerte intervención docente.

Actividad

Consigna escrita

Para repartir 8 chocolates entre 3 chicos se han partido por la mitad 6 chocolates y se entregaron cuatro mitades a cada uno. Luego los dos chocolates restantes se cortaron en tres partes cada uno y se le entregaron dos de esas partes a cada chico. Busca otros repartos que sean equivalentes a éste. Anota las expresiones fraccionarias que surgen y piensa cómo podrías explicar que son expresiones equivalentes que representan todas la misma cantidad.

Condiciones de realización

Organización: en duplas.

Procedimientos posibles:

- Generar otros repartos buscando expresiones equivalentes solamente para $\frac{2}{3}$, no atendiendo a la parte entera del cociente.
- Encontrar otros repartos considerando expresiones equivalentes solamente para la parte entera
- Buscar otros repartos equivalentes y argumentar apoyándose en representaciones gráficas
- Buscar otros repartos equivalentes y argumentar apoyándose en expresiones decimales.

Descripción de lo sucedido

Es de destacar que los alumnos no demostraron ninguna dificultad en comprender lo que esta actividad les planteaba. Todas las duplas se preocuparon rápidamente por intentar repartir los ocho chocolates de forma equivalente a la dada; fueron muy pocas las parejas que no pudieron arribar a un resultado final.

La mayoría de los equipos centró su atención en el número 2 el cual fue expresado como una fracción de denominador tres lo que los llevó a formular que $2 \text{ y } \frac{2}{3}$ era equivalente a $\frac{6}{3} \text{ y } \frac{2}{3}$. Otras duplas fueron más allá de esta expresión y encontraron la suma de $\frac{6}{3} \text{ y } \frac{2}{3}$ planteando formalmente la operación o indicando verbalmente que el resultado de esa suma era $\frac{8}{3}$. Quienes desarrollaron estos razonamientos argumentaron la equivalencia en cuestión apelando a dibujos. En esta oportunidad no se observaron validaciones apoyadas en expresiones decimales.

Otros alumnos no modificaron los dos chocolates que se les daba a cada niño y centraron su atención en encontrar repartos equivalentes para los dos chocolates que quedan al final por repartir. En estos casos aparecieron expresiones del tipo: "2 tabletas y $\frac{1}{2}$ de tableta y $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ ". Ante las intervenciones de la docente algunas duplas pudieron seguir avanzando en estas respuestas y elaboraron esta otra: " $2 + \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{6}$ " la cual da cuenta del trabajo con fracción de fracción involucrada en $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$.

En la puesta en común se socializaron los diferentes repartos obtenidos. La maestra gestionó esta instancia intentando que los alumnos argumentaran sobre la equivalencia entre las diferentes expresiones. Lograron reconocer $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ como un número: $\frac{1}{6}$.

Sin embargo los alumnos no pudieron reconocer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ es $\frac{4}{6}$, fracción equivalente a la original $\frac{2}{3}$.

Los alumnos pueden expresar que $\frac{4}{2}$ es 4 veces $\frac{1}{2}$ y que $\frac{2}{3}$ es 2 veces $\frac{1}{3}$.

El objetivo de la actividad fue cumplido ya que los alumnos pudieron identificar fracciones equivalentes y dieron argumentaciones pertinentes. Se observa un avance considerable con respecto a las producciones presentadas en las dos actividades anteriores. Esto puede deberse a que en esta propuesta fueron ellos quienes tuvieron que establecer las equivalencias mientras que en las anteriores debían expedirse sobre repartos equivalentes realizados por otros lo cual les obliga, primero, a realizar los repartos para luego ver si son o no equivalentes. Los alumnos no sintieron la necesidad de apelar a las expresiones decimales para solucionar la actividad propuesta.

A través de las tres actividades analizadas podemos ver avances significativos de una a otra actividad. Las producciones de los alumnos son cada vez más elaboradas. Asimismo observamos que las argumentaciones manejadas por los niños avanzan logrando poder completar "huecos" que iban quedando de actividades anteriores. Por ejemplo, en esta última, lograron relacionar como equivalentes $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{6}$.

Actividades de medida

Se pretende problematizar la relación entre la medida de las partes y la unidad utilizando fracciones del tipo $\frac{m}{n}$.

Consigna escrita

Se borró parte del segmento que estaba dibujado. Se sabe que la parte que quedó es $\frac{2}{3}$ del segmento completo. ¿Cómo era el segmento entero?



Condiciones de realización

Organización: actividad individual.

Forma de gestión

Se presenta la actividad para ser realizada en forma individual y así enfrentar a los alumnos al desafío de tener que explicitar sus procedimientos al trabajar las fracciones en un contexto de medida.

El maestro recorrerá el salón intentando registrar aquellos procedimientos interesantes para la puesta en común con el fin de focalizar en lo que se pretende institucionalizar. Es conveniente pensar al segmento unidad (1) como $\frac{3}{3}$, para analizar como completarlo. Así se deberá dividir el segmento dado en dos partes iguales, porque de esta manera se obtiene $\frac{1}{3}$ del segmento unidad que es lo que falta para completarlo. Es esperable que las intervenciones docentes se limiten a seguir problematizando la propuesta destacando la necesidad de recomponer el entero del cual sólo se conocen sus dos tercios.

Procedimientos posibles

- Considerar como sinónimas las expresiones “lo que quedó” con “lo que se debe agregar” por lo cual intentan buscar los dos tercios del segmento representado para agregarlo.
- Medir el segmento con una regla graduada y trabajar calculando un tercio del número que obtuvieron al medir. Luego agregarlo al segmento original.
- Realizar mediciones, trabajar numéricamente pero luego no poder realizar las representaciones de segmentos correspondientes a las medidas efectuadas.
- No lograr ver que el segmento unidad es mayor que el segmento dado.
- Dividir, por plegado, el segmento dado a la mitad y agregar, volviendo a plegar, esa mitad.
- Medir el segmento entregado, calcular la mitad y luego agregar un segmento cuya medida resulte el número calculado.

Descripción de lo sucedido

Los alumnos se abocaron a resolver lo propuesto sin ninguna demora. Se pudo evidenciar que algunos de ellos directamente midieron el segmento dado y luego agregaron la mitad de esa medida. Cuando el docente interrogaba sobre los motivos de ese procedimiento, muy pocos alumnos pudieron verbalizar en forma correcta alguna justificación.

Aparecen unas cuantas producciones de los alumnos sin alguna explicación escrita que argumente la solución presentada, cosa que no ocurrió en otras actividades vinculadas al reparto. Quizás no pudieron realmente explicar lo que realizaban porque no estaban seguros de ello.

No se constataron algunos de los procedimientos previstos, por ejemplo el plegado.

Se pudo observar también que otros alumnos realizaban cálculos del tipo: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ esto denota que ellos sabían que lo que faltaba para completar la unidad era un tercio de ella pero no pudieron reconocer que $\frac{1}{3}$ de la unidad era $\frac{1}{2}$ del segmento dado.

La docente debió intervenir en algunos casos para interrogar sobre la unidad, sobre el segmento original, en el sentido si era mayor o menor que el dado. De esta manera los alumnos fueron razonando sobre cuánto faltaba agregar.

Fue significativo el hecho de que algunos alumnos pudieran reconocer con bastante rapidez que lo faltante era $\frac{1}{3}$ de la unidad al hacer cálculos, pero al momento de tener que agregar ese tercio y no tener a la vista la unidad en cuestión no pudieron hacerlo. En realidad lo que sí hicieron fue buscar un tercio del segmento dado como si este fuese la unidad sobre la que estaban trabajando. Reconocer que un tercio de la unidad se correspondía con un medio del segmento entregado fue difícil para algunos alumnos. En esto subyace el hecho de reconocer que para calcular un tercio de la unidad, teniendo los dos tercios de la misma, se tiene que dividir entre dos y no entre tres como lo indica, en estas fracciones, el denominador.

Estos alumnos fueron desestabilizados por el cambio de unidad, se debía encontrar un tercio de una unidad determinando la mitad de otra.

Sin duda, este tipo de actividades no se presentan habitualmente en nuestras aulas ya que en general, se trabaja con unidades menores que el “objeto” a medir o a construir. En este caso la unidad no está dada sino que sólo se da parte de ella. Se evita así que aparezcan otros

conocimientos en juego en función de la unidad considerada. Es necesario variar la unidad con respecto al objeto soporte de la medición para lograr conceptualizar la idea de unidad y la función de ésta en la construcción o rearmado de figuras.

Es necesario también presentar situaciones en las que partiendo de fracciones del tipo $\frac{m}{n}$ haya que buscar $\frac{n}{n}$ o $\frac{1}{n}$.

Actividad

Se pretende que los alumnos operen con las fracciones resultantes de un proceso de medición.

Consigna oral

Ustedes deberán medir, utilizando una tirita de papel, el largo y el ancho del rectángulo que les entrego para luego comunicar dichas medidas al otro equipo así ellos representarán un rectángulo que sea "la mitad" del de ustedes.

En la consigna se solicita que la dupla receptora represente un rectángulo igual a la "mitad" del de la dupla emisora. Si atendemos a esta situación, los alumnos podrían interpretar por ejemplo que lo solicitado es construir un rectángulo con la mitad de cantidad de superficie con lo que con tomar la mitad de largo o ancho sería suficiente. Sin embargo aquellas duplas que consideraran la mitad del largo y la mitad del ancho estarían considerando la cuarta parte de cantidad de superficie del rectángulo original. No obstante, cualquiera de los caminos elegidos por las duplas receptoras pondría en juego la medición utilizando fracciones, que es el objetivo de la actividad. En otra instancia el docente podrá tomar esa discusión y atender a los diferentes resultados comparando cantidad de superficie de los rectángulos a partir de los procedimientos utilizados.

Condiciones de realización

Organización: el grupo será dividido en dos equipos y dentro de cada equipo se trabajará en dupla.

Materiales: rectángulos representados en papel y una tirita de papel³⁵.

Forma de gestión

El docente propondrá la actividad brindando a cada dupla el material necesario. Las duplas alternarán el rol de "dupla emisora"(A) con el del "dupla receptora"(B). Para ello cada uno de los equipos dispondrá de un rectángulo que en su momento deberán medir para comunicar sus medidas.

Procedimientos posibles

- Los alumnos podrán medir el rectángulo utilizando otro instrumento diferente a la tirita de papel entregada, por ejemplo una regla.
- Medir con la tirita de papel sólo en aquellos casos en los cuales el segmento a medir es mayor que la tira considerándola así como unidad.
- Expresar cuántas veces entra la tirita en los lados del rectángulo y dar resultados aproximados.
- Utilizar adecuadamente la unidad al medir.
- Comunicar numéricamente, con fracciones, las medidas del rectángulo en cuestión.
- Comunicar las medidas del rectángulo utilizando números mixtos.

³⁵ Las medidas de los rectángulos son: 15cm x 4cm para la dupla A y 18cm x 8cm para la dupla B, la unidad es una banda de 12cm. Esta información no se le proporciona a los alumnos.

Descripción de lo sucedido

La maestra explicó la dinámica de la clase y en qué consistía la actividad. Los alumnos formularon preguntas sobre cómo utilizar la tira de papel: ¿se puede doblar?, ¿se puede medir con regla?, etc.

Es de destacar que ante las aclaraciones que da la docente un alumno exclama: “¡vamos a medir con fracciones!”

En sí la actividad de los alumnos puede ser dividida en tres momentos: medir el largo y ancho del rectángulo, comunicar las medidas, representar un rectángulo con las condiciones que el problema impone.

En la primera parte, los alumnos midieron el largo y el ancho del rectángulo entregado, sin presentar problemas.

En el caso en que la tira de papel era más corta que el largo o el ancho a medir, los alumnos marcaron, en el rectángulo dado, la unidad y luego observaron cuántas veces entraba en la tira de papel aquello que aún no habían medido. En estos casos se pudo apreciar que algunas duplas expresan el resultado de la medición en forma aproximada.

En el caso en que la tira de papel era más larga que el segmento a medir, los alumnos plegaron el sobrante de tira y vieron cuántas veces entraba “el sobrante” en la propia tira, es decir buscaron a qué fracción de la unidad correspondía.

Al momento de tener que encontrar “la mitad” de las medidas recibidas para así poder representar el nuevo rectángulo, la mayoría de la clase intentó, con diferentes grados de acierto, evocar propiedades ya vistas en clases anteriores: “la mitad de $\frac{n}{m}$ es $\frac{n:2}{m}$ o $\frac{n}{m \times 2}$ ”. En este sentido, la docente intenta que los alumnos recuerden estas relaciones apelando solamente a ejemplos numéricos sin utilizar para ello el material de esta actividad (la tira de papel).

Se observa que en general los alumnos pueden manejar con mayor comodidad la primera propiedad, “la mitad de $\frac{n}{m}$ es $\frac{n:2}{m}$ ”. Por esta razón, varias duplas, al momento de tener que encontrar la mitad de $\frac{3}{4}$ optan por considerar la fracción equivalente $\frac{6}{8}$ lo que les permitió aplicar directamente la propiedad en cuestión: “la mitad de $\frac{3}{4}$ es igual a la mitad de $\frac{6}{8}$ que obtenemos haciendo $\frac{6:2}{8}$ ”. De esta forma encuentran la fracción $\frac{3}{8}$.

La actividad logra que los alumnos puedan operar con fracciones aún sin manejar los algoritmos correspondientes. Se ponen en juego además diferentes relaciones entre la unidad y la cantidad a medir que obligan al fraccionamiento de la unidad y a expresar la medida utilizando fracciones con el fin de comunicarla.

Propuesta para 6° año

Actividad de reparto

Son tres actividades íntimamente relacionadas entre sí que suponen una situación de reparto.

“Los problemas que siguen también ponen en juego situaciones de reparto, pero se avanza respecto del trabajo anterior en el siguiente sentido: se propone una situación y varios juegos de datos para dicha situación. Esto permitirá analizar más globalmente cada tipo de problema y, por ese motivo, hay una mayor exigencia de generalización. Al tratar de manera más general la relación entre el entero a repartir, la cantidad de personas entre las que se hace el reparto y el tamaño de cada parte, se pondrán en juego – tal vez de manera implícita – relaciones de proporcionalidad, aunque no es un propósito de esta secuencia tratarlas específicamente. Sucede que el tema “proporcionalidad” está entrelazado con el de “fracciones” y las relaciones que se establecen cuando se estudia uno de estos temas, abonan el trabajo con el otro. De ahí que muchas de las cuestiones que se juegan en estos problemas, podrán ser retomadas cuando el docente aborde explícitamente la enseñanza de la proporcionalidad.”³⁶

Actividad 1³⁷

Quiero comprar helado para darle $\frac{1}{4}$ kg a cada invitado a la fiesta. Completa la siguiente tabla en la que se relaciona la cantidad de invitados con la cantidad de kilogramos de helado que se necesita si se quiere dar siempre $\frac{1}{4}$ kg a cada invitado:

Cantidad de invitados	5		3	
Cantidad de kg de helado necesario		$1\frac{1}{2}$		$1\frac{3}{4}$

Actividad 2

Tengo 3 kg de helado para repartir entre los invitados a una fiesta. Completa la siguiente tabla en la que se relaciona la cantidad de invitados con la porción de helado para cada uno

Invitados a la fiesta.	2	3	4			
Cantidad de kg de helado que le toca a cada invitado				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Actividad 3

Quiero repartir los kilogramos de helado en partes iguales entre los 5 invitados a la fiesta. Completa la siguiente tabla que relaciona la cantidad de kg de helado disponibles con la porción que le tocará a cada invitado

Cantidad de kg de helado	3	1	$\frac{1}{2}$		6	$6\frac{1}{2}$	
Cantidad de kg de helado que le toca a cada invitado	$\frac{3}{5}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$

³⁶ Sadovsky, P. Coordinación. (2005c).

³⁷ Sadovsky, P. Coordinación. (2005c).

Estas tres actividades ponen en juego una terna diferente de datos.

En la primera se proporciona el "tamaño de la parte" producto del reparto y se juega con "cantidad de partes" y el "todo" haciendo variaciones en cada columna.

La segunda actividad proporciona el "total" y se juega con "cantidad de partes" y "tamaño de las partes".

La tercera presenta la "cantidad de partes" y se debe hallar o el "tamaño de la parte" o el "total".

En esta última tabla aparece completa la primera columna a los efectos de presentar una relación que pueda servir de base para el establecimiento de otras.

Condiciones de realización

Organización

Se previó la alternancia de formas de organización: la primera actividad será resuelta en duplas de niños. En tanto que la segunda se realizará en forma individual pasando de esta manera a una organización jerárquica descendente. Esta variación apunta a que cada alumno pueda reinvertir personalmente elementos surgidos en la discusión con el compañero.

Para la realización de la tercera propuesta se trabajará en equipos de cuatro niños en los que se mantendrán las duplas de la primera actividad (propuesta el día anterior). Este pasaje a una organización jerárquica ascendente posibilitará ampliar las reflexiones personales y aquellas que ya fueron compartidas por cada dupla.

Forma de gestión

Las actividades 1 y 2 se llevan a cabo el mismo día de la siguiente manera: se propone la primera actividad, se realiza la puesta en común correspondiente y luego se propone la segunda actividad finalizando con una puesta en común.

La tercera actividad se propone al día siguiente.

La consigna de cada actividad es entregada en forma escrita.

El docente recorrerá los grupos observando procedimientos, escuchando y registrando discusiones e interviniendo cada vez que sea necesario a los efectos de generar algunos cuestionamientos.

En esta instancia el docente recogerá elementos que considere pertinentes para integrar luego en la puesta en común.

En la primera tabla el hecho de que haya cinco invitados permite pensar que $\frac{5}{4}$ es igual a $1 \frac{1}{4}$.

Este resultado da la posibilidad de establecer relaciones con la segunda columna en la que el total es $1 \frac{1}{2}$, o sea $\frac{1}{4}$ más que el anterior. El encontrar el resultado 6 para la segunda columna favorece las relaciones que pueden establecerse en la tercera columna en la cual la cantidad de invitados es 3: la mitad que en la columna anterior y por ende se podrá pensar en que se necesita la mitad de helado (la mitad de $1 \frac{1}{2}$). La última columna puede pensarse a partir de los $\frac{3}{4}$ de la columna anterior (para tres invitados) más 1Kg que corresponde a cuatro invitados.

En la segunda tabla la acción de repartir se presenta más evidente que en la anterior lo que permite prever el surgimiento de procedimientos íntimamente ligados al reparto.

Es posible que los alumnos dividan tres por dos, luego por tres y finalmente por cuatro recurriendo a expresiones decimales. Si bien las siguientes columnas obligan a pensar en una acción inversa es posible que los alumnos tomen como referencia las anteriores y

establezcan relaciones sin recurrir a la división $3 : \frac{1}{2}$ (para la cuarta columna) o $3 : \frac{1}{4}$ (para la quinta columna).

La tercera tabla da la posibilidad de encontrar relaciones algo más complejas que ponen en juego fuertemente las establecidas entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$ integrando algunas que aparecieron en la actividad 1.

En la puesta en común de cada una de las actividades se podrán discutir las relaciones surgidas apuntando a observar también las relaciones que se dan entre la primera y la segunda fila.

Descripción de lo sucedido

Actividad 1

En la resolución de cada actividad aparecen diferentes procedimientos que dejan en evidencia las relaciones que se ponen en juego en cada caso. Es interesante analizar algunos de estos procedimientos así como expresiones que fueron recogidas de las discusiones en los grupos o en las instancias colectivas generales.

Algunos alumnos apelan a la representación decimal y en la primera actividad realizan planteos de este tipo " a cada niño le toca 0,250 kilos de helado, entonces para 5 niños se necesitan esos 0,250 por 5" . Acompañan estas expresiones escrituras como las siguientes:

$$0,25 \times 5 = 1,25$$

$$250g \times 5 = 1,25$$

Otras duplas apoyándose en las relaciones que conocen afirman "si tengo 1 kilo y medio y a cada uno le doy 0,25...con 1 kilo tengo para 4 niños y con $\frac{1}{2}$ kilo para 2 niños más. Son 6 niños" Este razonamiento es explicitado a través de estas escrituras:

1kg - 4 niños

$\frac{1}{2}$ -2 niños Total 6 niños

Otros alumnos completan la tabla trabajando directamente con fracciones:

$1 - \frac{4}{4}$ y $\frac{1}{4}$ más

$$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4} \text{ que es igual a } \frac{5}{4}$$

En el cálculo de la segunda columna aparece el siguiente comentario " en esta tengo un cuarto más que en la anterior...entonces me da para un invitado más. Son 6."

Inmediatamente algunas duplas establecen "1,50 son $\frac{6}{4}$ y me da para 6 niños y como en la otra tabla son 3 niños preciso la mitad de $\frac{6}{4}$ que son $\frac{3}{4}$ "

Aparecen otros planteos como:

$$\frac{6}{4} = 1 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = 250 \text{ para } 1 \text{ invitado}$$

$$\frac{1}{4} \times 6 = \frac{6}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{4} - 1\text{kg} \\ \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \end{array} \right\} 1\text{kg y } \frac{1}{2}$$

Cantidad de invitados 6.

Para la resolución de la última columna algunos alumnos se apoyan en la columna 2 en la que se necesita $1\text{kg } \frac{1}{2}$ afirmando "eso me da para seis, pero acá tengo un cuarto más...entonces me da para 7 niños"

También aparecen planteos como

$$1 \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

" $\frac{7}{4}$ que me da $\frac{1}{4}$ para cada niño, entonces con $\frac{7}{4}$ convidó a 7 niños, un cuarto para cada uno"

Actividad 2

La segunda tabla proporciona la cantidad total de helado y los alumnos deberán calcular en algunos casos la cantidad de invitados y en otros la cantidad de helado que le toca a cada uno.

La primera y segunda columna son fácilmente resueltas por todos los alumnos. En el primer caso dividen mentalmente 3 por 2 y en el segundo lo hacen por 3.

En la resolución de la tercera columna varios alumnos apelan a la relación con la primera columna haciendo razonamientos del tipo "Si son dos invitados le doy $1\text{kg y } \frac{1}{2}$ a cada uno .

A 4 le tengo que dar la mitad de eso" y aparecen planteos como:

$$1\text{kg } \frac{1}{2} : 2 = \frac{3}{4}$$

Son interesantes los cálculos mentales que realizan y que posteriormente son expresados a través de una operación que no ha sido trabajada con ellos, división de fracciones.

Aparecen también algunas escrituras decimales como $1,50 : 2 = 0,75$ que se combinan con fracciones en la verificación " $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ ".

Lo mismo sucede con la cuarta columna que los lleva a establecer relaciones con la 2°:

"Se les daba 1kg cuando eran 3, entonces ahora que se les da la mitad, da para el doble de invitados". Este razonamiento lo extienden a las siguientes columnas.

Actividad 3

El dato proporcionado hace referencia a la cantidad de invitados y los alumnos deben calcular la cantidad de helado que es necesario comprar o la cantidad de helado que toma cada niño.

Se presenta la primera columna completa de tal manera que el alumno pueda analizar la relación y establecer otras nuevas del tipo "si...entonces".

"Si para convidar a 5 niños con $\frac{3}{5}$ de helado a cada uno, necesito comprar 3 kilos entonces con un kilo voy a poder darles $\frac{3}{5}$ dividido 3 que es $\frac{1}{5}$ para cada uno"

“Y si tengo kilo para los 5 niños le va a tocar la mitad de $\frac{1}{5}$ que es $\frac{1}{10}$ ”

$$\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10}$$

En la tercera columna el dato dado hace referencia a la cantidad de helado que le toca a cada niño invitado.

$$\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$0,5 \times 5 = 2,5$$

En las siguientes columnas la mayoría de los alumnos continúa estableciendo relaciones a partir de las columnas anteriores.

En la puesta en común de cada actividad se explicitaron diferentes relaciones establecidas a partir de cada tabla.

El análisis colectivo de las mismas permitió el surgimiento de nuevas relaciones: relaciones entre columnas por un lado, entre filas por otro y además entre las propias tablas. Esta tabla sintetiza algunas de las relaciones surgidas en la primera actividad:

Cantidad de invitados	Cantidad de helado	Cantidad total de helado
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
4	$\frac{4}{4}$	1
5	$\frac{5}{4}$	$1 + \frac{1}{4}$
6	$\frac{6}{4}$	$1 + \frac{2}{4}$
7	$\frac{7}{4}$	$1 + \frac{3}{4}$

Esta actividad, si bien se presenta en un contexto cotidiano, da la posibilidad de despegarse del mismo para trabajar fuertemente con relaciones matemáticas valiosas. Se presentó como una instancia potente en la que no solo se pusieron en juego relaciones entre diferentes fracciones sino también las operaciones entre ellas.

En instancias posteriores se podría continuar explorando estas relaciones para poder llegar a conclusiones más generales. Así en la primera tabla se puede pasar de la primera fila a la segunda, multiplicando por $\frac{1}{4}$ y de la segunda a la primera dividiendo por $\frac{1}{4}$. Esto da la posibilidad de analizar “camino de ida y vuelta” en los cuales se involucran operaciones inversas.

Por otra parte se abren nuevas líneas para poder trabajar las relaciones de proporcionalidad.

Actividad para relacionar³⁸

La actividad apunta a establecer relaciones entre expresiones fraccionarias y enteras.

Completa los espacios en blanco

$$a) \frac{3}{4} + \dots = 1$$

$$b) \frac{3}{4} + \dots = 2$$

$$c) \frac{3}{4} + \dots = 3$$

$$d) \frac{5}{7} + \dots = 1$$

$$e) \frac{5}{7} + \dots = 2$$

$$f) \frac{5}{7} + \dots = 4$$

$$g) \frac{7}{5} - \dots = 1$$

$$h) \frac{9}{4} - \dots = 2$$

$$i) \frac{9}{4} - \dots = 1$$

Condiciones de realización

Forma de gestión

Cada niño recibirá la consigna en forma impresa y la actividad se realizará en forma individual.

Una vez terminada la tarea individual se pondrán en común los resultados obtenidos.

Se pretende poner en juego el concepto de fracción que ellos manejan "4 veces $\frac{1}{4}$ da un número entero. Si tengo $\frac{3}{4}$ me falta $\frac{1}{4}$ para llegar al entero".

A partir de los procedimientos empleados por los alumnos es necesario descubrir nuevas relaciones, por ejemplo: la relación que surge de los apartados a, b y c. En los tres casos aparece $\frac{3}{4}$ pero hay que vincular con 1, 2 y 3. Aparecen relaciones de doble y triple en la suma. Y en los sumandos faltantes ¿qué tipo de relaciones aparecen?

Es importante poder arribar a algunas conclusiones provisorias del tipo: "es necesario llegar a la unidad sumando o restando y agregar además, otras unidades."

Descripción de lo sucedido

Al entregar la propuesta, un alumno preguntó si había que hacerlo solo con fracciones o se podían escribir números "normales". La maestra le pregunta si se refiere a los "enteros" y el niño contesta que sí. La docente le contesta que debe escribir los números que él considere correctos o necesarios. El alumno utilizó fracciones en todos los casos.

³⁸ Sadovsky, P. Coordinación. (2005c).

El resto del grupo lo hizo anotando fracciones, menos un niño, que lo hizo utilizando naturales, en los casos que correspondía. Cuando vio que ningún compañero lo había hecho así, borró todo y lo hizo solo con fracciones; la docente le pide que anote nuevamente sus escrituras primarias.

Las mayores dificultades aparecieron en los casos en que había que restar. Algunos niños pensaron en completar el siguiente "entero" y otros anotaron fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ que no funcionaron.

En la puesta en común varios alumnos expresaron " $\frac{3}{4}$ más $\frac{1}{4}$ es un entero".

Uno de ellos concluyó "Le vas sumando lo que te falta para llegar a 4 enteros, 5 enteros, etc."

Con referencia al ítem b surgió "2 enteros son $\frac{8}{4}$, le sacás 3 y te da lo que le falta" Una alumna hace el siguiente comentario "El número de arriba tiene que ser igual al de abajo para llegar a 1, bueno es el numerador y el denominador". Se podría pensar que esta niña se basa únicamente en el significante sin tener en cuenta para nada el significado de cada fracción.

A partir de las discusiones se llega a algunas conclusiones como que escribir $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$ es lo mismo que anotar: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 2$ porque $\frac{4}{4}$ es lo mismo que 1.

En cuanto a las relaciones de doble o triple algunos alumnos sostienen: "Para llegar a 2, el de arriba tiene que ser el doble que el de abajo, lo multiplicás por 2. Para llegar a 3 el de arriba tiene que ser el triple, lo multiplicás por 3".

Otro alumno pasa y escribe $\frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{12}{4}$ y uno grita entusiasmado, "Son fracciones equivalentes". Inmediatamente el grupo se manifiesta en contra de esa aseveración dando explicaciones de este tipo "si son todos cuartos y diferentes cantidades arriba, nunca pueden ser equivalentes". Para ser equivalentes, los de abajo tienen que ser distintos, como cuartos y octavos".

En cuanto a los séptimos un alumno plantea: " $\frac{5}{7}$ no llega a un entero, le agregás $\frac{2}{7}$ y se forma 1"

Otro alumno agrega "Un entero puede tener $\frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{12}{12}$ ".

Cuando la maestra pregunta por qué fue necesario restar en los tres últimos casos para "llegar" a un "entero" los alumnos dan respuestas de este tipo:

"La fracción está pasada de $\frac{5}{5}$, ya es más de 1"

"Es 1 y $\frac{2}{5}$ ".

Refiriéndose a $\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$ dicen: "Hay $\frac{1}{4}$ que está sobrando para llegar a 2".

En el último caso expresan: "1 son $\frac{4}{4}$, entonces me sobran $\frac{5}{4}$ que los tengo que sacar."

En todos los casos los alumnos dan explicaciones que dejan en evidencia diferentes relaciones numéricas.

Hay un buen manejo de las fracciones mayores y menores que la unidad. El hecho de que los alumnos puedan sustituir fracciones por números naturales (por ej. $\frac{6}{3}$ por 2) hace pensar en una aproximación importante al concepto de fracción.

Esta actividad permite poner en juego relaciones entre fracciones centrándose fundamentalmente en el significado que el alumno le ha atribuido a la adición y a la sustracción aun cuando no se haya trabajado el algoritmo de dichas operaciones.

La propuesta se presenta en un contexto matemático que permite despegarse de representaciones gráficas y favorece el trabajo con expresiones numéricas.

Actividad de revisión

Esta actividad releva las ideas sobre fracciones que los alumnos han podido construir después de trabajada la secuencia.

Marquen lo que les parece que está bien y expliquen por qué

1) La fracción es un número SI NO

2) $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$

3) El resultado de dividir $\frac{1}{2}$ entre 5 es $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$

4) 2:5 es igual a $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{10}$

5) ¿Es cierto que a estos números hay que sumarle lo que está recuadrado para obtener $\frac{10}{5}$?

$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{10}{7}$
$\frac{8}{8}$	$\frac{7}{8}$

6) Si se hace la cuenta $\frac{2}{5} \times 3$ el resultado está entre

- 1 y 2
- 0 y 1
- 2 y 3

7) La mitad de $\frac{1}{2}$ está entre

1 y 2
0 y 1
2 y 3

8)



Estos son $\frac{4}{2}$

Dibujar $\frac{6}{2}$

Para que ustedes resuelvan

9) El resultado de una multiplicación de fracciones está entre 2 y 3.
Escriban una multiplicación posible para obtener un resultado como ese.

Condiciones de realización

Se entregará la consigna escrita y los alumnos trabajarán en duplas.

Las producciones de los niños posibilitarán posteriores instancias de discusión y resignificación de algunos conceptos.

1

En este planteo no se pretende que los alumnos den una definición de fracción sino que piensen en algo que ellos conocen e intenten caracterizarla.

Es posible que recurran a contextos cotidianos para dar las explicaciones. También es posible que algunos alumnos piensen en la fracción como número atendiendo solo al significante y vean "dos números con una rayita que los separa".

Respuestas dadas por los alumnos

La fracción es un número:

La totalidad de los alumnos afirma que la fracción "es un número" dando explicaciones que dejan en evidencia diferentes grados de aproximación al concepto.

Algunas de las respuestas dadas fueron las siguientes:

Sí

- Porque es un número fraccionado.
- Porque si yo digo que $\frac{1}{2}$ es 0,5... entonces ahí la fracción la pasé a otro número.
- Porque la pasas a decimales y te va a dar un número.
- Porque el numerador y el denominador está compuesto por números.
- Porque tiene números en él.
- Porque si dividís el denominador por el numerador te da número.

Si bien todos los alumnos reconocen la fracción como número, las explicaciones dadas nos podrían hacer pensar que la sola presencia de números que "componen" la representación de la fracción lleva a los alumnos a pensar que "eso es una fracción".

Algunos niños necesitan “ver” la fracción como decimal para reconocerla como número. ¿Por qué en este caso los alumnos ven al decimal como número y a la fracción no?

2

$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$

Durante toda la secuencia trabajada se apuntó a que los alumnos descubrieran valiosas relaciones entre los números fraccionarios. En este ítem no se pretende que los niños apelen a la multiplicación de fracciones sino que pongan en juego algunas de las relaciones que ellos han descubierto a través de las distintas actividades realizadas.

Varias duplas afirmaron que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{6}$ dando argumentaciones de este tipo:

- porque si dividís $\frac{1}{3}$ entre $\frac{1}{2}$ te da $\frac{1}{6}$
- porque sí dividís una tableta al medio y después cada una de ellas la dividís entre tres te da $\frac{1}{6}$
- es una tercera parte de la mitad
- es la mitad de un tercio
- si la unidad la dividimos en tercios y uno de los tercios a la mitad, eso equivale a $\frac{1}{6}$.

Una dupla marcó erróneamente $\frac{1}{5}$ dando como explicación “porque $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ ”.

En este caso queda en evidencia la ausencia de sentido de la situación. Esta pareja no ha logrado representarse la tarea que supone encontrar $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$, entonces opta por una operación equivocada que además está mal resuelta. Es posible que esta dupla extienda conocimientos que le han sido útiles en el conjunto de los números naturales pero que ahora se vuelven inadecuados.

Otra dupla afirma que es $\frac{1}{6}$ – “porque buscando igual denominador por ejemplo: 6 quedaría $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$. La diferencia es de $\frac{1}{6}$ ”

En este caso se repite, en parte, la situación anterior: la falta de atribución de sentido a la situación quedando en evidencia al apelar a la realización de una resta.

3

El resultado de dividir $\frac{1}{2}$ entre 5 es $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$

Al igual que en el ítem anterior la resolución de esta propuesta obliga a poner en juego relaciones construidas por los alumnos.

Una dupla afirma “Es $\frac{1}{10}$ - porque al dividir $\frac{1}{2}$ entre 5...cada una de esas porciones que quedan son $\frac{1}{10}$ ”.

Varios alumnos explican “Es $\frac{1}{10}$ porque $\frac{1}{2}$ dividido 5 nos da una quinta parte de un medio, nos da en décimos.”

Una dupla apela a “tortas” para dar una explicación “ es $\frac{1}{10}$ porque si una torta está dividida a la mitad y son 5 te va a quedar en 10 pedazos.”

Tres duplas apelan a las expresiones decimales de los números y realizan una división:
“Es $\frac{1}{10}$ porque

$$\begin{array}{r} 0,5 \overline{) 5} \\ 5 \quad 0,1 \\ 0 \end{array}$$

Solo una pareja de alumnos marca $\frac{4}{10}$ sin dar ninguna explicación.

4

2 dividido 5 es igual a $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{10}$

El presentar una serie de fracciones para identificar entre ellas el resultado da la posibilidad de incluir algunas que obligan a pensar antes de descartarlas. Este es el caso de $\frac{5}{2}$ y de $\frac{1}{5}$.

La primera, al involucrar los mismos números, podría llevar a centrarse en el significante y a identificarla como posible solución. En el caso de $\frac{1}{5}$ podría suceder que pensarán en dividir solo el numerador.

Sin embargo, la mayoría de los alumnos reconoce a $\frac{4}{10}$ como el resultado de dividir 2 entre 5.

Varias duplas argumentan de la siguiente manera “ porque dividimos 2 entre 5 y nos dio cuatro décimos.”

Algunas de ellas presentan la división realizada.

Dos duplas reconocen y marcan $\frac{4}{10}$ sin poder dar explicaciones.

En este ítem no aparecieron relaciones potentes entre fracciones como era previsible.

5

¿Es cierto que a estos números hay que sumarle lo que está en el recuadro para obtener 10/5?

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \cdots \cdots \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{4}{7} \cdots \cdots \boxed{\frac{10}{7}} \\ \frac{8}{8} \cdots \cdots \boxed{\frac{7}{8}} \end{array}$$

En esta propuesta se presenta la dificultad de tener que reconocer fracciones equivalentes. Las fracciones seleccionadas impiden que los alumnos apliquen mecánicamente la regla construida por ellos de “multiplicar numerador y denominador por un mismo número natural”. Aquí es necesario que identifiquen $\frac{10}{5}$ como 2 unidades y puedan reconocerlas en $\frac{14}{7}$ y en $\frac{4}{2}$.

Todas las duplas realizan, en primer lugar, las sumas para luego contestar.

La mayoría afirma que “Ninguna es cierta” dando explicaciones como:

“no porque estas sumas no dan $\frac{10}{5}$ y tampoco son equivalente a $\frac{10}{5}$ ”

Solo dos duplas reconocen que en dos casos ($\frac{14}{7}$ y $\frac{4}{2}$) “el numerador es el doble del denominador igual que en $\frac{10}{5}$. Entonces valen lo mismo”. Estas respuestas podrían hacer pensar si realmente hay una conceptualización o los alumnos solo se basan en el significante (numerador doble de el denominador) para dar respuestas sin analizar el significado en cada caso.

6

Si se hace la cuenta $\frac{2}{5}$ por 3 el resultado está entre: 1 y 2 - 0 y 1 - 2 y 3.

La propuesta tiene como objetivo poner en juego el orden en los números racionales. Los alumnos deben ubicar el resultado de una transformación en uno de los intervalos dados.

La mayoría de los niños la resuelve bien dando explicaciones de este tipo:

- Porque te da $\frac{6}{5}$ y es mayor que uno pero menor que dos.
- Porque $\frac{2}{5}$ por 3 da 1...entonces 2 entonces está entre 1 y 2.

2 duplas trabajan con expresiones decimales: hacen $2:5$ y al resultado (0,4) lo multiplican por 3.

Una dupla no justifica su respuesta y otra bina lo ubica entre 0 y 1 sin dar explicación.

7

En este ítem se continúa apuntando al orden poniendo en juego otras relaciones.

La mitad de $\frac{1}{2}$ está entre 1 y 2, 0 y 1, 2 y 3.

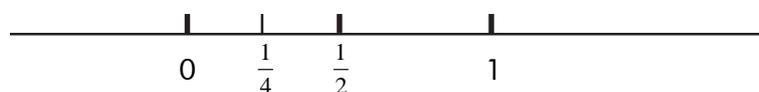
Todos los alumnos ubican correctamente el resultado y aparecen las siguientes explicaciones:

“porque es $\frac{1}{4}$ ”,

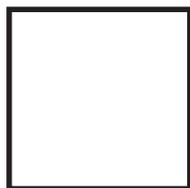
“porque es 0,25”

“porque 1 es la unidad y $\frac{1}{4}$ no llega a la unidad”

Algunas duplas realizaron una representación figural utilizando la recta numérica.



8



Estos son $\frac{4}{2}$

Dibujar $\frac{6}{2}$

Esta propuesta exige representar el "todo" partiendo de "partes" dadas. La dificultad radica en reconocer que la "parte" dada representa 2 enteros y los alumnos deben representar $\frac{6}{2}$ o sea 3 enteros.

La mayoría de los alumnos identificó primeramente un entero ($\frac{2}{2}$) dividiendo la figura en dos partes iguales y luego reprodujo una de esas partes.

Algunos alumnos escribieron:

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

agregando "nos falta un entero entonces tenemos que dibujar la mitad de la figura."

Esta propuesta "rompe" con las prácticas habituales en las que generalmente se da una "parte" para que los alumnos completen el todo.

Los alumnos no tuvieron dificultad en reconocer el "todo" y pudieron representarlo de diferentes maneras.

9

En este ítem se presenta un intervalo en el que deberá ubicarse el resultado de una multiplicación de fracciones. Los alumnos deberán proponer multiplicaciones cuyos resultados respeten el encuadre estar entre 2 y 3.

Es interesante ver la multiplicidad de multiplicaciones que lograron plantear los alumnos:

$$\frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{6}$$

$$\frac{5}{4} \times 2 = \frac{10}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{50}{10} = \frac{5}{2} \text{ porque } 0,5 \times 5 = 2,5$$

$$\frac{1}{2} \times 5 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{4} + \frac{2}{4} = \frac{10}{4}$$

$$10 \times 0,25 = 2,50$$

$$\frac{6}{3} \times \frac{2}{2} = 2 \times 1 = 2$$

$$\frac{2}{2} \times 2 = \frac{4}{2} = 2$$

Aparecen multiplicaciones en las cuales intervienen solo fracciones, otras en las que incluyen un número natural y otras en las que aparecen expresiones decimales.

Hay un caso en que utiliza la notación decimal para explicar lo que hizo.

El relevamiento de los conocimientos de los alumnos con respecto a “fracciones” deja en evidencia un buen nivel de conceptualización con un valioso manejo de las relaciones existentes entre las fracciones.

Por otra parte hay un buen hábito de involucrarse con las propuestas y hacer conjeturas, probar dichas conjeturas y reiniciar nuevos caminos.

Las discusiones permitieron ver evoluciones a lo largo de las mismas así como la necesidad de ponerse en el lugar del otro para pensar de otra manera la propuesta.

ALGUNAS REFLEXIONES FINALES...

Este trabajo se encuadra en la perspectiva de la Teoría de Situaciones desarrollada por Guy Brousseau.

La misma proporciona un marco para la elaboración y el análisis de las propuestas así como la generación de condiciones para la producción de conocimiento didáctico y matemático en los maestros y conocimientos matemáticos en los alumnos.

Algunas de las preguntas que orientaron nuestro trabajo fueron:

¿Cómo generar una mirada diferente en los maestros?

¿Cómo lograr que el docente sienta la necesidad de analizar y planificar la gestión de clase y la visualice como una instancia central en la construcción de conocimientos por parte de los alumnos?

¿Cómo convertir el análisis didáctico en una herramienta fundamental en la tarea docente? Con respecto a las producciones de los alumnos y a la gestión de clase:

¿Cómo lograr que el maestro reconozca qué producciones que aparentemente son iguales, son esencialmente diferentes?

¿Cómo se entrelazan los conocimientos personales de los alumnos y la producción colectiva de conocimientos?

¿Cuáles son las intervenciones docentes necesarias para lograr esas vinculaciones?

¿Cómo saldar la distancia entre lo que los alumnos producen y lo que el maestro institucionaliza?

Nuestro trabajo se concretó en dos niveles íntimamente relacionados: uno, vinculado a la formación de los maestros participantes y otro en relación con el contenido matemático que se aspiraba a enseñar en la escuela (fracciones).

Con respecto al trabajo con los maestros se realizó un valioso recorrido en el cual se abordaron contenidos matemáticos y didácticos desde las necesidades que fueron surgiendo para el trabajo con los alumnos.

Teniendo en cuenta que para enseñar "15 hay que saber 100", al decir de Miguel de Guzmán, se profundizó el tema números racionales sin perder de vista los números reales.

El trabajo con dichos contenidos matemáticos se realizó en la misma línea que pretendíamos que los maestros trabajaran con sus alumnos.

Se les hizo "vivir" una forma de aprendizaje diferente en la cual se cuestionaron muchos de sus conocimientos y a través de diferentes actividades se apuntó a la resignificación de los mismos.

Durante todo el proceso se les proporcionó bibliografía matemática y didáctica.

Paralelamente se fue instaurando en el grupo de docentes la necesidad de realizar el análisis didáctico de cada actividad que se propondría a los alumnos.

Esto permitió una mirada "con lupa" de diferentes acciones que hasta el momento eran consideradas triviales o parte de una rutina docente.

En este marco, la determinación del objetivo de cada actividad posibilitó identificar claramente el contenido o aspecto del contenido que se pretendía trabajar y analizar la pertinencia de la actividad para el abordaje de dicho contenido.

El análisis previo de los posibles procedimientos de resolución que podían utilizar los alumnos permitía, entre otras cosas, analizar la pertinencia de la actividad, los conocimientos que se ponían en juego (diferenciándolos de los que se quieren trabajar) y las intervenciones docentes adecuadas en cada caso.

Todo este análisis permitió a los maestros confrontar su gestión de clase con un modelo de gestión diferente. Esto obligó a nuevas lecturas y a permanentes discusiones que enriquecieron tanto a los maestros como al equipo coordinador de este trabajo.

A lo largo del Proyecto los maestros comenzaron a reconocer el análisis didáctico como una poderosa herramienta en su tarea docente. “El análisis previo permite pensar el contenido a trabajar en el marco de la clase, pudiendo prever acciones de los alumnos y del docente, que apunten a la apropiación del contenido a enseñar. Exige la tarea de imaginarse lo que deseamos que sea una clase de matemática en la escuela”.¹

La confrontación entre todo lo que se preveía con lo que efectivamente sucedía abrió nuevas puertas para continuar reflexionando y repensando las intervenciones docentes necesarias. El trabajo realizado con los maestros les proporcionó herramientas para mirar los avances de los niños en términos de conocimientos. Ya no era suficiente promover distintas formas de resolución entre los alumnos. Ahora se convertía en necesidad el poder identificar lo que había en cada procedimiento de resolución. Una mirada fundada en elementos teóricos permitía identificar diferencias esenciales entre procedimientos que hasta ahora eran catalogados como similares. El estudio previo de los procedimientos posibles así como lo que cada uno de ellos ponía en juego permitió pensar las intervenciones en cada caso y aquellas que daban lugar a establecer relaciones entre los diferentes conocimientos puestos en juego. Estas intervenciones debían apuntar a la movilización de argumentos matemáticos. Se requería además de actividades que exigían una validación por parte de los alumnos.

La búsqueda de argumentos debió ser instaurada en las clases como parte de la cultura matemática. Esto supuso repensar algunos aspectos de la gestión de clase como lo es, entre otros, el arribo a conclusiones.

Según Margolinas existen dos formas diferentes de actuar en la fase de conclusiones: la que actúa como evaluación cuando el docente informa sobre lo correcto o no de una producción individual o colectiva y la que se convierte en validación cuando es el alumno o los alumnos quienes deciden si la producción es o no correcta.

Según Quaranta “Desde el momento en que el maestro concluye mediante una evaluación, el problema planteado se cierra: ya no queda desafío para la actividad del alumno. Por otro lado se genera una relación contingente entre las resoluciones, y su validez, una sensación de que las relaciones matemáticas responden a resortes que no son controlables por el sujeto” (...) “El trabajo del alumno culmina con la resolución o la respuesta. El problema “muere” tanto para los que lo resuelven correctamente como para los que cometen errores, ya que no hay ninguna exigencia de la situación que conduzca a un trabajo reflexivo sobre la respuesta”

Para que la validación esté en manos de los alumnos se hace necesario mantener cierto grado de incertidumbre por parte del docente. Esto obliga a buscar las razones del funcionamiento de un conocimiento. Es posible que no todos los alumnos logren encontrar esas razones en un momento dado y será entonces el docente quien buscará establecer algunas relaciones entre las producciones de aquellos alumnos que están más lejanas del saber “oficial”.

Es en este marco que se busca también diferenciar, al decir de Patricia Sadovsky, lo legítimo de lo correcto.

Hay respuestas o procedimientos de los alumnos, que si bien pueden no ser correctos para ese problema, son pertinentes, “legítimos”, en el campo matemático. El poder discernir estos procedimientos otorga al docente la posibilidad de intervenir aprovechando esta legalidad,

¹ Rodríguez Rava, B. (2006)

cuestionándolos o planteando nuevas preguntas. De esta forma se le ayuda al alumno a continuar con la actividad matemática pero con más conocimientos.

La gestión de cada problema supuso el debate y la confrontación que muchas veces dieron lugar a nuevas preguntas, nuevos problemas.

Es necesario que cada instancia de estas no se cierre en sí misma sino que permita alojar nuevas preguntas que abran paso a nuevas relaciones. Esto es lo que da "pistas" de evolución en los alumnos, el poder construir nuevos conocimientos a partir de la confrontación. Producción esta que puede no estar contenida en el problema inicial pero requiere del mismo. También es un indicador de evolución el poder entender aquellas preguntas que no tenían sentido para el alumno cuando enfrentaron el problema.

Las actividades seleccionadas para presentar en esta publicación dejan abierto este espacio en el que cada maestro podrá ubicar nuevas preguntas de acuerdo a lo sucedido en el grupo.

Las fracciones a lo largo del ciclo escolar

Como lo hemos señalado en este trabajo, el concepto de fracción es complejo y requiere de un accionar sostenido a lo largo del ciclo escolar. Supone una ruptura importante con los conocimientos que el alumno construye con respecto a los números naturales.

En este Proyecto se hizo un recorte del contenido NUMERACIÓN, seleccionándose para trabajar el tema fracciones.

Este recorte reconoce el relacionamiento de estos números con el resto (naturales, enteros, etc.) así como también las características propias de las fracciones que marcan una diferencia importante con los números naturales. También se deja de lado, en esta instancia, todo lo vinculado a la expresión decimal como representación de los números racionales. Si bien es real que estas expresiones mantienen la organización decimal, también es cierto que dejan en evidencia otros aspectos (diferentes a las fracciones) del objeto que representan. Las fracciones y los decimales pueden considerarse como representaciones de distintos registros semióticos por lo que cada uno de ellos es portador de un significado específico. Por otra parte es necesario tener en cuenta que en algunos casos los alumnos enfrentados a las expresiones decimales activan hipótesis construidas a partir del trabajo con los números naturales. Ejemplo de esto es lo relativo al orden, cuando en la comparación de dos números decimales ponen en juego la hipótesis de cantidad afirmando que es mayor el que tiene mayor cantidad de cifras. Esto se ve reforzado con una mirada del decimal, por parte de los niños, como número "partido" por medio de una coma (la parte "entera" por un lado y la parte "decimal" por el otro). Estos son algunos de los casos que si no son contemplados por la enseñanza, los conocimientos que tienen los alumnos, pueden actuar como obstáculos a nuevos aprendizajes.

Según algunos autores hay una ruptura importante entre los números naturales y los racionales. Ruptura, pues supone aspectos muy diferentes que necesitan un "quiebre" de lo ya construido con respecto a los números naturales. Ejemplos de esto son el carácter denso de los racionales, una infinitud "diferente" y el significado de algunas operaciones. La pregunta que surge... ¿es realmente un quiebre lo que deberá producirse o es un abordaje diferente de estas complejas relaciones?

¿Cuáles fueron algunos de los aspectos relevantes del contenido fracciones en cada nivel?

En el **Nivel Inicial** hubo un desarrollo importante de diferentes representaciones pictográficas con sentido. Cada actividad de reparto las exigió implícitamente.

Esas distintas representaciones se fueron problematizando permanentemente favoreciendo así la construcción de sentido.

Resultó interesante analizar la evolución de los repartos en tanto que se fue dando un despegue de los destinatarios de los mismos. En un primer momento los alumnos se erigían destinatarios de los repartos pero a medida que se avanzó en este tipo de actividades los repartos se volvieron externos a los alumnos.

Se vio también una interesante aproximación a la relación cantidad de partes – tamaño de las partes, relación esta que se continúa trabajando también en los siguientes grados.

Si bien los niños de 5 años lograron manejar los nombres de algunas fracciones como “medios”, “cuartos” etc. no se puede afirmar que estos alumnos tenían un dominio de los mismos.

La evolución lograda en este nivel, permite pensar en una primera aproximación a situaciones en las que se ponen en juego números fraccionarios. Si bien es claro que se está muy lejos del concepto de fracción se puede destacar el valor de este enfrentamiento del alumno a situaciones en diferentes contextos (repartir, relacionar y medir) que obliga al uso de diferentes representaciones de la fracción.

En **Primer año** se continuó trabajando en las diferentes representaciones del número fraccionario lo que permitió “cargar” de sentido las representaciones que los niños utilizaban y en algunos casos veían por primera vez. Las representaciones numéricas ocupan un lugar importante en las producciones de los alumnos.

En este grado empezaron a configurarse los primeros repertorios de suma a los que los alumnos recurrían a medida que se avanzaba en el trabajo.

Con respecto a la relación cantidad de partes – tamaño de las partes, los alumnos de Primer año lograron identificar rápidamente esta relación y producir generalizaciones primarias.

En las distintas propuestas presentadas aparece la dificultad en reconocer la equivalencia entre fracciones. Dificultad justificada en la medida que supone ver una misma cantidad representada de más de una forma. Aquí el trabajo que generalmente se realiza con la numeración natural obstaculiza el poder identificar distintas fracciones como representantes de un mismo número. Se torna, entonces, necesario que el alumno reconozca un número natural a través de diferentes escrituras por ejemplo que pueda identificar el 6 como $3+3$; $4+2$; $1+5$; etc.

En **Segundo año** aparece, con mucha naturalidad, la escritura del número mixto.

En este grado se identifican relaciones entre fracciones que se evidencian en expresiones

como “4 de $\frac{1}{4}$ es uno”. Hubo un manejo importante de fracciones en las situaciones en las que se exigía la composición de una unidad.

Aparecieron relaciones de equivalencia como $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ y otras del tipo $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

También se destaca la puesta en juego de relaciones entre el dividendo, el divisor y el cociente.

En las actividades de reparto los alumnos comienzan a atender la exhaustividad del mismo identificando los restos y dividiéndolos cuando la situación lo habilita.

En **Tercer año** aparece, en la resolución de las primeras actividades, una recurrencia al número decimal. No debemos olvidar que en este grado ingresa programáticamente esta escritura con más fuerza que la fraccionaria. En las primeras situaciones de reparto, al apelar a escrituras decimales, aparecieron respuestas como “ a cada nene le doy 0,66 chocolate”, carentes de sentido. La reflexión en torno a la pertinencia de estas escrituras, a través de las distintas actividades, llevó a los alumnos a recurrir a escrituras fraccionarias.

Hay un avance significativo en el establecimiento de diferentes relaciones como orden, composición de cantidades, equivalencia y suma de fracciones (con procedimientos no algorítmicos).

Los alumnos lograron una mayor aproximación a la idea de fracción poniendo en juego razonamientos similares para identificar la equivalencia de repartos.

Cuarto año ahonda en las relaciones identificadas en grados anteriores llegando a elaboraciones del tipo $1 = n \times \frac{1}{n}$.

La relación cantidad de partes – tamaño de las partes cobra fuerza en las expresiones numéricas despegándose totalmente de las representaciones gráficas.

Se profundizan las relaciones entre algunas fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$.

Ya no solo suman medios y cuartos, sino también tercios, sextos, etc. llegando a la elaboración de algunas “reglas”.

Las relaciones de equivalencia son acompañadas con explicaciones y argumentos matemáticos que dejan en evidencia un importante nivel de aproximación al concepto de fracción.

Hay además un pasaje fluido entre las diferentes formas de representar una cantidad con fracciones.

Quinto año logra una profundización en la equivalencia de repartos identificando el valor equivalente de distintas fracciones en diferentes producciones. En este marco se enfrentan y resuelven situaciones en las que aparece la “fracción de fracción” sin haber trabajado la multiplicación de fracciones.

Las relaciones numéricas que manejan aportan a la identificación del “todo” a partir de una “parte” distinta de $\frac{1}{n}$. Este es el caso en que se enfrentan a la representación gráfica o numérica de $\frac{2}{5}$ y deben representar la unidad correspondiente.

Ocupa un lugar importante la fracción en contexto de medida en el que pueden reinvertir algunos de los conocimientos construidos en el contexto de reparto o en el que posibilita el establecimiento de relaciones.

En este grado, el repertorio de cálculos que manejan los alumnos constituye un aporte valioso en la resolución de situaciones que involucran otros aspectos de las fracciones, como son las relaciones de orden, de equivalencia, etc.

Las explicaciones y argumentaciones que utilizan les permiten acercarse cada vez más a generalizaciones de gran valor en la actividad matemática escolar.

El trabajo en **Sexto** año marca un momento especial de cierre provisorio de conocimientos con los que los alumnos egresan del ciclo escolar primario.

Estos alumnos de 6° participantes de esta experiencia dan cuenta de un relacionamiento “fluido” con estos números que antes los podrían considerar como “dos números con una

rayita que indica que tenes que dividir” y hoy, muchos de ellos, los identifican como un número.

Hay un manejo importante de las relaciones de orden, de equivalencia y de las operaciones (resueltas con procedimientos no algorítmicos), así como de un repertorio de cálculos al que apelan con total fluidez.

A lo largo del año se vio una sustitución de las escrituras decimales, que al comienzo tenían mucha fuerza, por las fracciones.

En los últimos grados escolares se apuntó no solo a la utilización de este “tipo” de número como instrumento sino también a un análisis del mismo como objeto matemático. En este sentido se pretendió poner en juego la dialéctica instrumento – objeto, elaboración teórica de Regine Douady.

Douady ²plantea al respecto: “Decimos que un concepto es instrumento cuando focalizamos nuestro interés sobre el uso que se hace de él para resolver un problema. Un mismo instrumento puede ser adaptado a varios problemas, varios instrumentos pueden ser adaptados a un mismo problema. Por objeto entendemos el objeto cultural que tiene un lugar en un edificio más amplio que es el saber sabio en un momento dado, reconocido socialmente”.

Según Douady los conceptos matemáticos tienen una doble dimensión: la de instrumento o herramienta y la de objeto. En el primer caso se hace referencia a la acción que el sujeto realiza valiéndose de un concepto, le sirve para resolver una situación. En el segundo caso se ponen en juego los aspectos culturales, más impersonales, que no se relacionan necesariamente a una situación determinada.

Este recorrido realizado a lo largo del ciclo escolar permitió a los maestros participantes una mirada global de un contenido que generalmente es mirado muy parcialmente desde el grado en que enseñan. Por otra parte permitió identificar y distinguir los distintos aspectos a trabajar de un contenido a enseñar.

Este abordaje dio la posibilidad de distinguir entre otros los siguientes aspectos del contenido fracciones: representaciones, orden, densidad, equivalencia, operaciones, cálculos.

Los mismos fueron abordados en situaciones pertenecientes a los distintos contextos.

El trabajar en los tres contextos de uso permitió enriquecer la variedad de propuestas y despegarse de los clásicos problemas que involucran únicamente el significado parte – todo con las conocidas representaciones de “tortas” y de algunas figuras geométricas.

Las actividades en el contexto de reparto ofrecen, en un principio, la posibilidad de validar empíricamente los resultados obtenidos. Por otra parte actúa como soporte de la idea de repartos equitativos y exhaustivos. El alumno puede imaginarse estos repartos, al igual que los resultados de los mismos.

Es en este marco también debemos atender algunas cuestiones provenientes del contexto que pueden actuar como un obstáculo. En una situación de reparto de globos (número impar) en que estos debían ser repartidos entre dos niños, los alumnos argumentaban que el que “quedaba se puede cortar con una tijera y hacer dos chiquitos”. En este caso el contexto real de reparto (con el material que se incluía en la consigna) actuaba como un obstáculo para lograr la equitatividad del mismo.

Cuando utilizamos el contexto de la medición el propósito es enfrentar a los alumnos a situaciones en las que se deba fraccionar la unidad porque no “entra” un número exacto de veces. Esto les obliga a utilizar un número que da cuenta de ese fraccionamiento. “ Hay un rico espacio de problemas con los que los alumnos pueden interactuar alrededor de esta idea y ese solo hecho justifica su introducción” (...) “pero los racionales no alcanzan para describir los procesos de medición.(...) En realidad, si se piensa en la medición como un asunto práctico, los racionales son suficientes: la existencia de segmentos inconmensurables

² Douady, R. (1986)

con la unidad no puede detectarse en el acto efectivo de medir. Pero teóricamente, el lector lo sabe, los racionales no alcanzan para describir los procesos de medición. Resulta entonces que la referencia al contexto de medidas ofrece algo...e inevitablemente oculta algo...Decimos "inevitablemente" porque no habría ninguna posibilidad de introducir simultáneamente los números racionales y los irracionales para ahorrar una *mentira*".³

El contexto al que llamamos *relacionar* permite que los alumnos comiencen a establecer relaciones que aún no conocen. Aquí el contexto aporta, al decir de Patricia Sadovsky, lo que la matemática todavía no puede aportar.

Si bien los contextos de uso actúan como soporte tenemos claro que "...si se quiere que en la clase se haga matemática, habrá que pensar cómo concebir un escenario en el que se respeten los rasgos esenciales del trabajo en la disciplina teniendo en cuenta los conocimientos de los alumnos".⁴

Podríamos afirmar que en nuestro caso, las actividades propuestas actuaron como soporte pero a su vez permitían un despegue de los contextos.

Fue interesante ver cómo los alumnos, de las clases superiores esencialmente, se desprendían del contexto para trabajar con los números sin tener en cuenta el "espacio dimensional".⁵

Finalmente cabe destacar algunos aspectos vinculados a una forma de trabajo que se instauró en las aulas.

El docente impone sus expectativas a través de "camuflajes" didácticos con el fin de lograr lo esperado. El alumno entra en este juego.

"¿Cuál es el origen y el estatus de las reglas que hacen posible este juego? ¿Por qué el alumno las acepta? Brousseau expresa "El contrato se elabora sobre la base de la repetición de los hábitos específicos del maestro y permite al alumno decodificar la actividad didáctica. El sentido atribuido a la situación depende mucho del resultado de las acciones repetidas del contrato didáctico (...) así este se presenta como la huella de exigencias habituales del maestro sobre una situación particular"⁶

Una "mirada" del Proyecto desde los maestros

Los maestros participantes del Proyecto al hacer una valoración del mismo destacan: la profundización de contenidos matemáticos, el poder gestionar las actividades teniendo en cuenta variados aspectos analizados en el proceso de planificación, el contar con actividades secuenciadas y el apoyo teórico permanente por parte del equipo Técnico.

Valoran además, la posibilidad de participar en un ámbito de discusión que los llevó a analizar y a profundizar en distintos aspectos vinculados a las fracciones y a los planteos didácticos.

Con respecto a los avances realizados por los alumnos los maestros afirman que hay una aproximación diferente al concepto de fracción a partir de la posibilidad de trabajar con ellas en los diferentes aspectos. Valoran el hecho de que los alumnos ponen en acción conocimientos acerca de la fracción aún cuando todavía no pueden explicitarlos. Con respecto a esto corresponde señalar que a veces existe un desfase entre la acción y la explicación: los alumnos pueden actuar pero no pueden dar explicaciones consistentes que permitan el establecimiento de algunas cuestiones generales.

³Sadovsky, P. (2005 a)

⁴ Ibidem

⁵ Vergnaud, G. (2003)

⁶ Ávila, A. (2001)

Destacan el hecho de que los niños participaron en múltiples actividades vinculando los diferentes aspectos trabajados.

La “mirada” de los alumnos

Al finalizar el Proyecto se realizó un análisis, con los niños, de lo que habían aprendido de las fracciones. Para ello se utilizaron diferentes estrategias didácticas de acuerdo a los niveles. En 5° y 6° año se les pidió a los alumnos que, en duplas, escribieron todo lo que sabían sobre las fracciones.

En este marco se produjeron los “yo ya se” que sintetizan los conocimientos que los alumnos dicen saber.

De estos “yo ya se” extrajimos y organizamos en cinco aspectos las expresiones de las duplas:

Con respecto a las fracciones afirman que:

- Es un número
- Es una división
- Es una división que se puede expresar de diferentes maneras
- Está compuesta por dos números naturales
- Tienen numerador y denominador

Con respecto al Orden

- Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la mayor será la que tenga mayor numerador
- Para saber si la fracción pasa la unidad hay que fijarse si el numerador es mayor que el denominador
- Para saber que fracción es mayor hay que buscar la fracción que esté más cerca o la que se pasa de la unidad. Ejemplo: $\frac{6}{3}$ y $\frac{3}{9}$. El mayor es $\frac{6}{3}$ porque en esta fracción hay 2 unidades y en $\frac{3}{9}$ faltan $\frac{6}{9}$ para poder llegar a la unidad.

Con respecto a la Equivalencia

- Podés buscar equivalencias; por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
- 1 unidad = $\frac{8}{8}$
- Cada fracción tiene infinitas equivalencias
- Se puede establecer equivalencias de fracciones a un número decimal dividiendo el numerador por el denominador
- Un número como 0,75 se puede escribir con distintas fracciones como $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{9}{12}$

Con respecto a las Representaciones

- En las fracciones ni en el numerador ni en el denominador puede haber comas.
- Las fracciones se pueden representar con números mixtos, o sea $1\frac{1}{2}$

Con respecto a las Operaciones

- Con las fracciones se puede sumar, restar, multiplicar y dividir
- Para calcular la mitad de una fracción si el numerador es par, por ejemplo $\frac{2}{9}$, se divide entre 2 el numerador ($\frac{2}{9}:2$) pero si el numerador no es par toda la fracción queda multiplicada por $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{9}\times\frac{1}{2}\right)$
- Para hallar la mitad de una fracción depende qué numerador y denominador tenga. Podés multiplicar el denominador por 2 .
- Para saber el doble de una fracción como $\frac{3}{6}$ hay que multiplicar ese número por $\frac{2}{1}$.

Estas afirmaciones de los niños dejan en evidencia sus conocimientos. Conocimientos estos que fueron construidos por ellos, en un largo proceso, a través de diversas actividades. Cada una de ellas los ubicó en situación de hacer Matemática. Esto exigió una gestión de clase diferente, en la que el maestro problematizó sistemáticamente todo el quehacer matemático escolar con respecto a las fracciones.

NUEVAS LÍNEAS DE ACCIÓN:

Entrevistas didácticas

A partir de este trabajo se abren nuevas líneas de acción para continuar profundizando. Se instala la necesidad de realizar entrevistas didácticas en las cuales se podrá identificar la evolución de los conocimientos de los alumnos a partir de las propias interacciones con el objeto matemático y de las discusiones que se generan con un "otro". Las entrevistas didácticas dan la posibilidad de observar y analizar los "corrimientos" de las afirmaciones de los alumnos y las causantes de los mismos. Permiten identificar las rupturas y enlaces que se producen entre los conocimientos personales del alumno y la producción colectiva.

Por otro lado estas entrevistas posibilitan el análisis detallado del potencial de cada actividad permitiendo distinguir los aspectos que habilita y los que bloquea. La entrevista es una estrategia metodológica habitual en la investigación en Didáctica de la Matemática.

"La entrevista es especialmente útil como vía complementaria de la realización en el salón de clase, ya que al permitir analizar más de cerca "el lado del sujeto" – sus interacciones con la situación – aporta información relevante para profundizar en el análisis de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las nociones en juego".⁷

La inclusión de la entrevista nos permite articular diferentes instancias de estudio del funcionamiento de una situación.

Conformación de un grupo de trabajo

A partir del recorrido realizado por los maestros se genera la posibilidad de conformar un grupo de estudio, reflexión y producción con algunos de los docentes participantes de esta experiencia. Los maestros cuentan con elementos teóricos y prácticos que les posibilitan la elaboración de nuevas propuestas y la gestión de las mismas. Esto exige una profundización teórica en el marco de su formación permanente.

⁷ Lerner, D. (2005)

Producción

Surge la necesidad de seleccionar y profundizar en el análisis de algunas de las actividades propuestas.

También es pertinente continuar con la discusión y la teorización sobre algunos de los focos que emergen de este trabajo a los efectos de continuar generando insumos que aporten a los futuros cambios curriculares.

En síntesis, esta acción de desarrollo curricular, llevada adelante por el Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP, permitió un análisis profundo de una secuencia de actividades, la formación de un grupo de maestros y la producción de teoría con respecto a la enseñanza de las fracciones a nivel del ciclo escolar.

El Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP capitaliza de esta forma el espacio de producción que viene desarrollando desde el año 2000 y la difusión de la misma en los subsistemas correspondientes.

ANEXOS

Recorrido realizado desde Inicial – Nivel 5 años a 3er año

CATEGORÍAS	SUB-CATEGORÍAS	ACTIVIDADES Nivel 5 años	ACTIVIDADES 1er AÑO	ACTIVIDADES 2do AÑO	ACTIVIDADES 3er. AÑO	
1) Relacionar	Constitución de la unidad (Representaciones gráficas)	Componer la unidad a partir de medios y cuartos. (3) ¹	Componer la unidad a partir de medios y cuartos. (3)	Componer la unidad a partir de medios, cuartos y octavos. (2)	Componer la unidad a partir de medios, cuartos y octavos. (2)	
		Componer la unidad teniendo en cuenta la cantidad de partes. (2)	Componer la unidad teniendo en cuenta la cantidad de partes. (2)	Relacionar el número de partes y el tamaño de las partes. (1)	Relacionar el número de partes y el tamaño de las partes. (2)	
		Poner en juego la equivalencia entre las partes que constituyen una unidad. (2)	-----	Poner en juego la equivalencia entre las partes que constituyen una unidad. (1)	-----	
		Componer la unidad apelando a la equivalencia entre las partes (2)	Componer la unidad apelando a la equivalencia entre las partes. (2)	-----	-----	
	Identificación de fracciones	-----	Componer numéricamente la unidad. (1)	-----	-----	-----
		Reconocer mitades a partir de representaciones dadas. (2)	Reconocer mitades a partir de representaciones dadas. (2)	Reconocer mitades y cuartos a partir de representaciones dadas. (2)	Reconocer fracciones a partir de representaciones dadas. (1)	
		Reconocer mitades a partir de la acción de representar por parte de los propios alumnos. (1)	Reconocer mitades a partir de la acción de representar por parte de los propios alumnos. (1)	Reconocer fracciones a partir de la representación por parte de los propios alumnos. (2)	-----	
		Representar una unidad e identificar mitades. (1)	-----	Relacionar fracciones a partir de una representación numérica. (2)	-----	
	Composición de una unidad a partir de fracciones	-----	-----	-----	-----	Poner en juego la equivalencia de fracciones. (4)
		-----	-----	Componer la unidad a partir de fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. (2)	Componer la unidad a partir de fracciones del tipo $\frac{1}{n}$. (2)	
-----	-----	-----	Identificar fracciones equivalentes en representaciones dadas. (1)	Relacionar una cantidad con expresiones fraccionarias. (2)		

¹ Los números indican cantidad de actividades realizadas.

CATEGORÍAS	SUB-CATEGORÍAS	ACTIVIDADES Nivel 5 años	ACTIVIDADES 1er AÑO	ACTIVIDADES 2do AÑO	ACTIVIDADES 3er. AÑO
II) Repartir	Reparto de magnitudes discretas	Repartir magnitudes discretas. (4)	Reparto de magnitudes discretas. (3)	Repartir equitativa y exhaustivamente una cantidad inicial y el resto resultante. (1)	-----
	-----	-----	Tomar decisiones sobre el reparto del resto. (4)	Tomar decisiones sobre el reparto del resto. (1)	Tomar decisiones sobre el reparto del resto. (2)
	Reparto de magnitudes continuas (involucrando fracciones)	Repartir magnitudes continuas. (5)	Repartir magnitudes continuas de manera exhaustiva. (2)	Repartir equitativa y exhaustivamente una cantidad inicial y el resto resultante. (7)	Repartir equitativa y exhaustivamente una cantidad inicial y el resto resultante. (2)
			Utilizar equivalencia de repartos. (3)	Relacionar el resultado del reparto con la cantidad a repartir y el número de partes. (6)	Relacionar el resultado del reparto con la cantidad a repartir y el número de partes. (6)
III) Medir	Fraccionamiento de la unidad para expresar una medida.	Fraccionar la unidad para expresar una medida. (2)	Fraccionar la unidad para expresar una medida. (1)	Expresar una cantidad de longitud en función de una unidad determinada. (1)	-----
	Recomposición de una cantidad de magnitud a partir de una medida	Comunicar una medida utilizando "medios". (1)	-----	Comunicar una medida a partir de medios y cuartos. (2)	Comunicar una medida a partir de fracciones del tipo $\frac{1}{n}$. (2)
		Recomponer una cantidad de magnitud a partir de su medida. (1)	-----	-----	Interpretar una medida expresada en fracciones. (3)

Recorrido realizado desde 4to.año a 6er año

CATEGORÍAS	SUB-CATEGORÍAS	ACTIVIDADES 4to AÑO	ACTIVIDADES 5to AÑO	ACTIVIDADES 6to AÑO	
I) Relacionar	Componer una cantidad a partir de una fracción.	Componer numéricamente una cantidad a partir de fracciones del tipo $\frac{1}{n}$. (7)	Componer numéricamente una cantidad a partir de fracciones del tipo $\frac{m}{n}$. (2)	Componer numéricamente una cantidad a partir de fracciones mayores que la unidad. (2)	
		Identificar fracciones menores que la unidad en representaciones gráficas "no habituales". (1)	Identificar fracciones menores y mayores que la unidad en representaciones gráficas "no habituales" (5)	Identificar fracciones mayores que la unidad en representaciones gráficas "no habituales" en función del numerador y denominador. (8)	
	Orden.	Comparar fracciones en relación con el entero. (2)	Ordenar fracciones apelando a relaciones con el entero o con los medios. (1)	Encuadrar fracciones entre naturales consecutivos y entre fracciones. (7)	
	Cálculo estableciendo relaciones entre fracciones y entre fracción - unidad.	Utilizar relaciones entre fracciones y enteros en suma y resta (algoritmo no convencional). (1)	Utilizar relaciones entre fracciones y enteros en suma, resta, multiplicación y división (algoritmo no convencional). (8)	Utilizar relaciones entre fracciones y enteros en suma, resta, multiplicación y división (algoritmo no convencional). (8)	
	Equivalencia de fracciones.	Construcción de relaciones a partir de fracciones equivalentes. (1)	Fundamentar estrategias para reconocer fracciones equivalentes. (1)	-----	
	Representación en la recta numérica.	-----	Representar fracciones en la recta numérica. (1)	-----	
	II) Repartir	Repartir magnitudes discretas y continuas.	Repartir equitativa y exhaustivamente una cantidad y el resto resultante. (2)	Repartir equitativa y exhaustivamente una cantidad y el resto resultante. (1)	Repartir equitativa y exhaustivamente una cantidad y el resto resultante. (1)
			Identificar de repartos equivalentes. (2)	Repartir y componer la unidad a partir de diferentes fracciones. (1)	Repartir y componer la unidad a partir de diferentes fracciones. (1)
		Fracciones equivalentes en repartos.	Producir repartos equivalentes. (2)	Utilizar equivalencia de fracciones en repartos. (3)	Utilizar equivalencia de fracciones en repartos. (3)

CATEGORÍAS	SUB-CATEGORÍAS	ACTIVIDADES 4to AÑO	ACTIVIDADES 5to AÑO	ACTIVIDADES 6to AÑO
III) Medir	Comunicar una medida con fracciones.	Comunicar una medida de longitud utilizando fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ y enteros. (1)	Componer numéricamente una cantidad a partir de fracciones del tipo $\frac{m}{n}$. (2)	Comunicar una medida de longitudes y áreas utilizando fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ y $\frac{m}{n}$. (3)
	Reproducir una cantidad de magnitud a partir de una medida dada en fracciones.	Reproducir una medida a partir de fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ y $\frac{m}{n}$ menores que la unidad. (1)	Reproducir una medida a partir de fracciones del tipo $\frac{m}{n}$ mayores que la unidad. (1)	-----
	Representar la unidad a partir de fracciones dadas.	-----	Representar la unidad a partir de fracciones dadas. (1)	-----

BIBLIOGRAFÍA

Alvarado, M; Brizuela, B. – comps - (2005) – “Haciendo números”. Paidós. México.

Apostol, Tom (1995) – “Calculus”. Tomo I. Editorial Reverté. Barcelona.

Ávila, Alicia (2001) – “El maestro y el contrato en la teoría brousseauiana” en Educación Matemática. Vol 13 (3). Grupo Editorial Iberoamerica. México.

Artigue, Michele (1995) – “Ingeniería didáctica” en Artigue, M. Douady, R; Moreno, L. Y Gómez, P. (comps) *Ingeniería didáctica* en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamerica. México.

Block, David; Solares, Diana (2001) – “Las fracciones y la división en la escuela primaria: Análisis didáctico de un vínculo” en Educación Matemática. Vol 13 (2). Grupo Editorial Iberoamerica. México.

Block, David (2004) – “La enseñanza de las fracciones en la Escuela Primaria”. Ponencia: Departamento de Investigaciones Educativas. Cinvestav. México.

Block, David (Enero 2005) – “De la expresión ‘2 de cada 4’ a la expresión ‘1/2 de...’ La noción de razón, precursora de la fracción. ” Ponencia. Departamento de Investigaciones Educativas. Cinvestav. México.

Bouvier, Alain; George, Michel (1979) – “Diccionario de Matemáticas”. Akal Editor. Madrid.

Brousseau G. (1983) – “Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques” en Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 4. La pensée sauvage. Grenoble.

Brousseau, G. (1980) – “Problèmes d’enseignement des décimaux” en Recherche en didactique des mathématiques. Vol.1.1. La pensée sauvage. Grenoble.

Brousseau G. (1980) – “ L’échec et le Contrat” en “Recherches”, N° 41.

Cólera, José ; de Guzmán, Miguel (1994) – “Bachillerato, Matemática I”. Editorial Anaya. Barcelona.

Chamorro, Ma. del Carmen (2003) – “Didáctica de la Matemática”. Editorial Pearson. Madrid.

Dávila, Martha (1992) – “El reparto y las fracciones”, en Educación Matemática. Vol. 1. Grupo Editorial Iberoamerica. México.

Dávila, Martha (2002) – “Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado de conocimiento”. Tesis. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

De León, Humberto; Fuenlabrada, Irma (1996) – “Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto” en Revista Mexicana de Investigación Educativa. Vol 1 Num. 2. México.

Dickson, Linda; Brown, Margaret; Gibson, Olwen (1991) – “El aprendizaje de las Matemáticas”. Editorial Labor S.A. Madrid.

Douady, Regine (1986) – “Jeux de cadres et dialectique outil – objet” en Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 7. La pensée sauvage. Grenoble.

Escolano, Rafael; Gairín, José María (2005) – “Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria” en Revista UNIÓN. N° 1 . Dir. Elect. www.fisem.org

Gil, Omar (2003) – “Números naturales, racionales y reales, y el sistema de numeración” en Publicación Curso de Actualización en la Enseñanza de la Matemática para Inspectores de Educación Primaria. PMEM – ANEP. Montevideo.

Inhelder, Bärbel. (1975) – “Aprendizaje y Estructuras del Conocimiento”. Editorial Morata. Madrid.

Laborde, Colette; Vergnaud, Gérard (1994) – “El aprendizaje y la enseñanza de la matemática” en Vergnaud, G. *Aprendizajes y Didácticas: ¿qué hay de nuevo?* Edicial S.A. Buenos Aires.

Lerner, Delia (2005) – “¿Tener éxito o comprender?” en Alvarado, M; Brizuela, B.(comps) *Haciendo números*. Paidós. México.

Llinares, Salvador; Sánchez, Ma. Victoria (1997) – “Fracciones”. Editorial Síntesis. Madrid.

Margolinas, Claire (1993) – “De l’importance du vrai et du faux dans la classe des mathématiques”. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Parra, Cecilia (2005) – “Cálculo mental en la escuela primaria” en Parra, C. y Saiz, I. *Didáctica de Matemáticas* (comps). Paidós. Buenos Aires.

Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel; Szeminska, Alina (1960) – “The child’s conception of geometry” Routledge and Kegan Paul. London.

PMEM - Material de trabajo interno.

Quaranta, Ma. Emilia; Tarasow, Paola (2004) – “Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas” en Revista Relime. Vol 7. N° 3.

Rodríguez Rava, Beatriz y Xavier de Mello, Alicia - comps.- (2005) – “El Quehacer Matemático en la Escuela”. Editorial Queduca. FUM TEP. Montevideo.

Rodríguez Rava, Beatriz (2005) – “El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial de maestros” en Revista Quehacer Educativo N° 79. Octubre. FUM TEP. Montevideo.

Rodríguez Rava, Beatriz (2006) – “El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial de maestros” en Revista Quehacer Educativo N° 79. Octubre. FUM TEP. Montevideo.

Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen (2000) – “Interacciones en la clase de matemática: interferencias no previstas para situaciones previstas”. *Projecto-Revista de Educação*. Vol II.3. Porto Alegre.

Sadovsky, Patricia. (2005 a) – “ Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos”. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Sadovsky, Patricia. (2005 b) – “ La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática” en Alagia, Humberto; Bressan, Ana; Sadovsky, Patricia *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Sadovsky, P. (coordinación), Lamela, C.; Carrasco, D.; Quaranta, M.; Ponce, H. (2005) – “*Matemática. Fracciones y Números Decimales (4, 5, 6, y 7). Apuntes para la Enseñanza.*” Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planteamiento. Dirección de Currícula.

SEP- Secretaría de Educación Pública (2000) *Matemáticas. Cuarto Grado. (2da edición)* México.

Vergnaud, Gérard (1983) – “*Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives*” *Atelier International d'Eté: Recherche en Didactique de la Physique*. La Londe les Maures, Francia, 26 de junio a 13 de julio.

Vergnaud, Gérard (2003) – “*El niño, las Matemáticas y la realidad*”. 8va reimpresión. Trillas. México.

Vilaró, Ricardo (2003) – “*Los números decimales y el cálculo: ¿0,99...es igual a 1?*” En *Publicación Curso de Actualización en la Enseñanza de la Matemática para Inspectores de Educación Primaria*. PMEM – ANEP. Montevideo.